QA
1
J6836
sér.4
t.5E

UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s4journaldemathm05pari

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

ÉLÉMENTAIRES

A L'USAGE

DE TOUS LES CANDIDATS AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT
ET DES ASPIRANTS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES

Publié sous la direction

de M. DE LONGCHAMPS

PROFESSEUR DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES AU LYCÉE SAINT-LOUIS

4e SÉRIE

TOME CINQUIÈME

Année 1896.

38889
20/3/97

PARIS

LIBRAIRIE CH. DELAGRAVE

15, RUE SOUFFLOT, 15

1896

QA
1
.6836
c.5E

JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
ÉLÉMENTAIRES

SUR QUELQUES IDENTITÉS TRIGONOMÉTRIQUES

Par M. **E.-M. Langley.**

1. — Considérons un triangle ABC; soit O le milieu de l'arc BC de la circonférence circonscrite au triangle; projetons O en P, Q sur les côtés AC, AB.

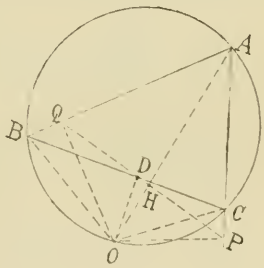
Nous avons

$$\widehat{AOP} = \frac{1}{2}\widehat{POQ} = \frac{B+C}{2},$$

$$\widehat{COP} = \widehat{COA} - \widehat{AOP} = B - \frac{1}{2}(B+C) = \frac{B-C}{2}.$$

Les triangles rectangles OPC, OQB sont égaux, car OP = OQ; de plus,

$$\widehat{PCO} = \pi - \widehat{OBA} = \widehat{OBQ}.$$



Ainsi BQ = PC; il en résulte

$$AP + AQ = AB + AC,$$

et comme AP = AQ, on a

$$AP = AQ = \frac{b+c}{2};$$

puis

$$AC - CP = AB + BQ,$$

ou

$$CP = BQ = \frac{b-c}{2}.$$

Les triangles rectangles OPC, OPA, donnent alors

$$OP = AP \operatorname{cotg} AOP = \frac{b+c}{2} \operatorname{cotg} \frac{B+C}{2},$$

$$OP = PC \operatorname{cotg} COP = \frac{b-c}{2} \operatorname{cotg} \frac{B-C}{2}.$$

En comparant ces deux expressions de OP, nous avons finalement (*)

$$\frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}}.$$

2. — Traçons PQ qui coupe BC en D et la bissectrice AO en H. Prouvons d'abord que D est le milieu de BC.

Le théorème de Méuélaüs, appliqué au triangle ABC et à la transversale PDQ, donne

$$\frac{PC}{PA}\cdot\frac{QA}{QB}\cdot\frac{DB}{DC} = 1.$$

Or PC = QB, PA = QA; donc DB = DC.

Dès lors, le point D étant le milieu de BC, OD est perpendiculaire sur BC.

Cela posé, on a

$$(1) \qquad OP = OC\cos COP = OC\cos\frac{B-C}{2}.$$

Le quadrilatère OCPD étant inscriptible; les angles OCD, OPD sont égaux; par suite, les triangles rectangles OCD, OPH sont semblables. D'après cette remarque, nous avons

$$(2) \qquad \frac{OP}{OC} = \frac{PH}{CD} = \frac{AP\sin PAH}{CD} = \frac{\frac{b-c}{2}\sin\frac{A}{2}}{\frac{a}{2}}.$$

Comparant (1), (2), on a

$$\frac{a}{b-c} = \frac{\sin\frac{B+C}{2}}{\sin\frac{B-C}{2}}.$$

(*) Au sujet de cette formule voyez *J. E.*, 1895, pp. 15, 64 et 153.

RÉSOLUTION DE L'ÉQUATION

$a \sin x + b \cos x = c$

(CONSTRUCTION GÉOMÉTRIQUE DE SES RACINES)

Par **M. Lauvernay.**

Posons $x = \alpha + \varphi$, l'équation peut s'écrire :

$(a \sin \varphi + b \cos \varphi) \cos \alpha + (a \cos \varphi - b \sin \varphi) \sin \alpha = c.$

Disposons de φ de façon que l'on ait $a \cos \varphi = b \sin \varphi$, d'où

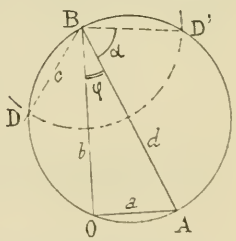
$$\frac{\cos \varphi}{b} = \frac{\sin \varphi}{a} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{b \cos \varphi + a \sin \varphi}{d^2}$$

en posant $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.

L'angle α est déterminé par l'égalité :

$$\cos \alpha = \frac{c}{d}.$$

D'où la construction géométrique suivante : On construit le triangle rectangle OAB, dont les côtés de l'angle droit sont $OA = a$, $OB = b$, par suite $\varphi = \widehat{OBA}$; du point B comme centre avec c comme rayon, décrivons une circonférence rencontrant la circonférence circonscrite au triangle OAB en D et D', les valeurs de x sont



$$\widehat{OBA} + \widehat{ABD'} = \varphi + \alpha = x'$$
$$OBA - ABD = \varphi - \alpha = x''.$$

En effet, on a

$$\cos ABD' = \frac{BD'}{BA} = \frac{c}{d} = \cos \alpha, \quad \cos \varphi = \frac{OB}{BA} = \frac{b}{d} \quad \sin \varphi = \frac{a}{d}:$$

donc $\cos \alpha = \cos (x' - \varphi)$, ou $\frac{c}{d} = \frac{b}{d} \cos x' + \frac{a}{d} \sin x$

et $\cos \alpha = \cos (\varphi - x'')$ ou $\frac{c}{d} = \frac{b}{d} \cos x'' + \frac{a}{d} \sin x''$

Discussion. — On doit avoir $BD' < BA$ ou $c < d$, $c < \sqrt{a^2 + b^2}$.

Remarque. — On pourra comparer la construction précé-

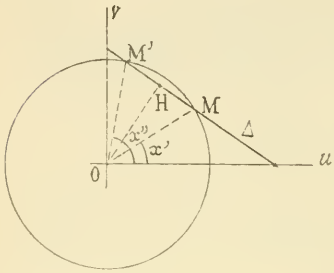
dente avec celle qui a été proposée par M. Droz-Farny (*J. E.*, 1895, p. 217).

Le nombre des constructions que l'on peut proposer est infini, bien entendu; en voici une autre.

Posons (*): $\sin x = u$, $\cos x = v$,

nous avons $au + bv = c$, $u^2 + v^2 = 1$.

Prenons deux axes Ou, Ov, et portons : sur Ou, la longueur



$$OP = \frac{c}{a}; \quad \text{sur } Ov, \quad OQ = \frac{c}{b}.$$

La droite PQ coupe la circonférence Γ, décrite de O comme centre, avec l'unité pour rayon, en deux points (réels ou imaginaires) M, M'. Les angles MOu, $M'Ov$, ont un sinus égal à u, un cosinus égal à v. Ce sont les angles cherchés (entre o et 2π bien entendu) (**).

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que la perpendiculaire OH, abaissée de O sur MM', soit plus petite que l'unité, ou égale à l'unité.

Or, on a, par une propriété connue,

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{\overline{OP}^2} + \frac{1}{\overline{OQ}^2},$$

ou

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2}.$$

La condition de réalité est donc

$$c^2 \leqslant b^2 + a^2.$$

G. L.

(*) J'ai développé la méthode que j'applique ici dans une petite note publiée dans le *Bulletin scientifique*, 1888, p. 60. La solution que je donne aujourd'hui simplifie un peu celle que j'ai indiquée à l'endroit cité (p. 63).

(**) Un ami de la *Géométrographie* voudra peut-être comparer ces diverses constructions, celle de M. Droz-Farny, celle de M. Lauvernay, celle que j'ai donnée dans l'ouvrage cité et celle que je propose ici; il nous dira laquelle est la plus simple au point de vue géométrographique.

ÉTUDE SUR L'INVOLUTION GÉNÉRALISÉE

Par M. **A. Noyer**, élève à l'École polytechnique, et M. **Ch. Michel**, élève à l'École normale supérieure.

1. — Par définition, nous dirons que les couples (corrélatifs) de points, de droites ou de plans qui forment avec un *couple de base* une division, un faisceau ou un feuillet harmonique sont en *involution binaire*. — Les groupes (corrélatifs) de trois points, de trois droites ou de trois plans qui sont les sommets, les côtés des triangles conjugués par rapport à une *conique de base*, les arêtes ou les faces des trièdres conjugués par rapport à un *cône de base* sont en *involution ternaire*. — Enfin, les groupes (corrélatifs) de quatre points ou de quatre plans qui sont les sommets ou les faces des tétraèdres conjugués par rapport à une *quadrique de base* sont en *involution quaternaire*.

2. — Dans les tétraèdres conjugués par rapport à une quadrique de base qui ont en commun un sommet et la face opposée, les groupes d'arêtes ou de faces qui passent par le sommet commun, ainsi que les groupes de sommets ou d'arêtes qui sont dans la face commune, sont en involution ternaire. Le cône de base est le cône circonscrit à la quadrique issu du sommet commun, et la conique de base est la conique d'intersection de la quadrique par la face commune. — De même, dans les groupes d'éléments en involution ternaire qui ont un élément commun, les couples qui restent sont en involution binaire.

Par suite, d'une propriété quelconque commune aux groupes d'éléments en involution quaternaire résulte une propriété de groupes d'éléments en involution ternaire, et de celle-ci résulte aussi une propriété de l'involution binaire : ce qui donne trois propriétés correspondantes dans les involutions binaire, ternaire et quaternaire.

Dans cet article, nous nous proposons, inversement, partant d'une propriété de l'involution binaire, de démontrer la propriété correspondante de l'involution ternaire, et, partant de

celle-ci, de nous élever à la propriété correspondante de l'involution quaternaire.

PASSAGE DE L'INVOLUTION BINAIRE A L'INVOLUTION TERNAIRE

3. — Considérons deux trièdres O(ABC) et O(A'B'C') d'une involution ternaire. L'intersection OI des faces O (BC) et O (B'C') étant conjuguée par rapport au cône de base du plan des arêtes OA et OA', il existe deux trièdres de l'involution qui ont pour arêtes, l'un OI et OA, l'autre OI et OA', leurs troisièmes arêtes étant deux droites OP et OP' dans le plan des droites OA et OA'. Nous formons ainsi une chaîne de quatre trièdres O(ABC), O(AIP), O(A'IP'), O(A'B'C') dans laquelle deux trièdres consécutifs quelconques ont une arête et la face opposée communes. — Si le cône de base est isotrope, les trièdres sont trirectangles et nous arrivons aux rotations successives qu'a imaginées Euler pour exprimer les coordonnées d'un point dans un système d'axes rectangulaires en fonction de ses coordonnées dans un autre système trirectangle de même origine.

Faisons alors correspondre d'une façon déterminée à chaque trièdre de l'involution une quantité ou une figure *dans laquelle les arêtes et les faces du trièdre jouent le même rôle.* Que les quantités ou les figures qui correspondent aux trièdres ayant une même arête et la même face opposée conservent la même valeur ou aient une même propriété avec une figure fixe, cette valeur ou cette propriété est commune aux deux quantités ou aux deux figures qui correspondent à deux trièdres consécutifs quelconques de la chaîne précédente et par suite à celles qui correspondent aux deux trièdres O(ABC) et O(A'B'C') qui sont quelconques dans l'involution. Tel est notre *premier théorème fondamental*, qui, par dualité, s'applique encore aux triangles conjugués par rapport à une conique de base.

En voici les principales applications :

4. *Théorèmes d'Apollonius.* — Dans une quadrique de centre O, considérons un trièdre dont les arêtes sont trois diamètres conjugués rencontrant la quadrique en A, B, C. *Quand le trièdre se déforme en conservant une même arête* OA et

la même face opposée, les deux arêtes variables OB et OC restent diamètres conjugués dans la conique d'intersection de la quadrique et de la face fixe.

1° La somme des carrés des diamètres variables OB et OC étant constante (premier théorème d'Apollonius dans le plan), la somme des carrés des diamètres est la même pour les positions du trièdre qui ont une arête commune. Par suite, elle est la même pour toutes les positions du trièdre. C'est le premier théorème d'Apollonius dans l'espace.

2° La surface du parallélogramme construit sur les deux diamètres variables OB et OC est constante (second théorème d'Apollonius dans le plan). Le volume du parallélépipède construit sur OA, OB, OC étant égal au produit de la surface de ce parallélogramme par la distance du point A à la face fixe est donc constant pour tous les trièdres quiont une même arête; d'où le troisième théorème d'Apollonius dans l'espace.

Ces deux démonstrations sont connues; elles sont en particulier dans le livre de Salmon, mais sous une forme moins systématique.

3° La somme des carrés des surfaces des parallélogrammes construits sur OA, OB et sur OA, OC est constante. En effet, elle est égale au produit du carré du diamètre commun par la somme des carrés des distances des points B et C à l'arête OA, c'est-à-dire par la somme des carrés des projections de OB et de OC sur un plan perpendiculaire à OA. Mais cette somme est constante, car les projections des diamètres OB et OC sont diamètres conjugués dans la conique qui est la projection de la conique d'intersection de la quadrique par le plan de la face fixe. D'où le second théorème d'Apollonius.

Théorème. — Un trièdre trirectangle pivote autour d'un point O et ses arêtes rencontrent la quadrique en A et A′, B et B′, C et C′.

Le trièdre conservant une même arête AA′, les deux autres BB′ et CC′ se déplacent dans le plan perpendiculaire et la somme

$$\frac{1}{OB.OB'} + \frac{1}{OC.OC'}$$

est une quantité constante, d'après un théorème connu.

Donc, la somme

$$\frac{1}{OA.OA'} + \frac{1}{OB.OB'} + \frac{1}{OC.OC'}$$

est la même pour tous les trièdres qui ont une arête commune, et, par conséquent, en vertu du théorème général, pour tous les trièdres trirectangles qui ont leur sommet en O.

Dans le cas particulier où O est centre, la somme

$$\frac{1}{\overline{OA}^2} + \frac{1}{\overline{OB}^2} + \frac{1}{\overline{OC}^2}$$

est constante; d'autre part, elle est égale à l'inverse du carré de la distance du point O au plan ABC. Le plan ABC enveloppe donc une sphère. *(A suivre.)*

NOTE SUR L'EXTRACTION
DES RACINES CARRÉES ET CUBIQUES

Par M. **Aubry.**

On a plusieurs moyens d'extraire la racine carrée des quantités numériques. Nous en avons indiqué, dans le *J. S.* de 1893, un certain nombre, dont plusieurs sont, peut-être, nouveaux. Voici encore un procédé fort simple.

L'extraction de la racine carrée du nombre $N = a^2 \pm b$ revient, en posant $\frac{\pm b}{a^2} = x$, à la recherche de la valeur de l'expression $\sqrt{1 + x}$, où x est, en valeur absolue, inférieur à 1. Posons $y = \sqrt{1 + x} - 1$, d'où la relation

$$(\alpha) \qquad y^2 = x - 2y.$$

Si on suppose $\pm y^k = Mx - Ny$

il viendra, à cause de (α)

$$\mp y^{k+1} = -Mxy + Ny^2 = +Nx - (Mx + 2N)y.$$

Par conséquent, soit $A = 1$, $B = 2$, $C = Ax + 2B$, $D = Bx + 2C$, $E = Cx = 2D$, ... les termes de la suite

$$Ax - By, \qquad Bx - Cy, \qquad Cx - Dy, \qquad \ldots$$

représentent les valeurs des diverses puissances de y; et, comme $y < 1$, elles tendent vers zéro et les valeurs des expressions

$$(\beta) \qquad \frac{Ax}{B}, \qquad \frac{Bx}{C}, \qquad \frac{Cx}{D}, \qquad \ldots$$

tendent vers celle de y. Si $x = \frac{1}{5}$, on aura $y < 0,1$, et par suite $y^2 < 0,01$, $y^3 < 0,001$, $y^4 < 0,0001$.

Chaque nouveau rapport donnera une décimale exacte de plus : le n^e aura donc au moins n décimales exactes. Or, il est toujours possible de se donner $x < \frac{1}{5}$ (*J. S.*, 1893, p. 156 et 171.)

Les expressions (β) peuvent facilement s'écrire en fonction de x et de y, de cette manière. Multiplions successivement les deux membres de (α) par y, il vient, en tenant compte de cette même relation (α)

$$\begin{aligned}
y^3 &= -2x + (4 + x)y \\
y^4 &= (4x + x^2) - (8 + 4x)y \\
y^5 &= -(8x + 4x^2) + (16 + 12x + x^2)y \\
y^6 &= (16x + 12x^2 + x^3) - (32 + 32x + 6x^2)y \\
y^7 &= -(32x + 32x^2 + 6x^3) + (64 + 80x + 24x^2 + x^3)y \\
y^8 &= (64x + 80x^3 + 24x^3 + x^4) - (128 + 192x + 80x^2 + 8x^3)y \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

En général, on a

$$\pm y^n = \left[\begin{array}{l} 2^{n-2}x + \dfrac{n-3}{1}\,2^{n-4}x^2 + \dfrac{(n-4)(n-5)}{1.2}\,2^{n-6}x^3 \\ \qquad + \dfrac{(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3}\,2^{n-8}x^4 + \ldots \end{array}\right]$$

$$- \left[\begin{array}{l} 2^{n-1} + \dfrac{n-2}{1}\,2^{n-3}x + \dfrac{(n-3)(n-4)}{1.2}\,2^{n-5}x^2 \\ \qquad + \dfrac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1.2.3}\,2^{n-7}x^3 + \ldots \end{array}\right] y.$$

Les puissances successives de y tendent rapidement vers zéro. On a donc les valeurs suivantes, qui se rapprochent de plus en plus de y.

$$\frac{2x}{4+x},\quad \frac{4x+x^2}{8+4x},\quad \frac{8x+4x^2}{16+12x+x^2},\quad \frac{16x+12x^2+x^3}{32+32x+6x^2},\ \ldots$$

ou, en général

$$\frac{2^{n-2}x + \dfrac{n-3}{1}\,2^{n-4}x^2 + \dfrac{(n-4)(n-5)}{1.2}\,2^{n-6}x^3 + \ldots}{2^{n-1} + \dfrac{n-2}{1}\,2^{n-3}x + \dfrac{(n-3)(n-4)}{1.2}\,2^{n-5}x^2 + \ldots}$$

Cette méthode s'étend aux degrés supérieurs. On est ramené à la résolution d'équations du premier degré, mais par des calculs naturellement assez longs.

Nous allons encore l'appliquer à la recherche de l'unique racine réelle positive de l'équation $x^3 \pm ax = b$, b positif. Supposons que la racine soit plus petite que 1, — ce dont on s'assurera par des tâtonnements faciles; — remarquons que de

$$(\gamma) \qquad x^m = A + Bx + Cx^2,$$

on tire

$$(\delta) \qquad x^{m+1} = Cb + (A \mp aC)x + Bx^2.$$

Les puissances positives de x sont donc toutes de la forme $A + Bx + Cx^2$.

Éliminons x^2 entre (γ) et (δ), on trouve

$$x = \frac{C^2b - BA + x^m(B - Cx)}{B^2 - C(A \mp aC)},$$

ou, en négligeant le terme en x^m,

$$x = \frac{C^2b - BA}{B^2 - C(A \mp aC)}.$$

Supposons maintenant la racine x plus grande que 1, on posera $x = \frac{1}{z}$, ce qui conduira à résoudre l'équation

$$z^3 \mp \frac{a}{b} z^2 = \frac{1}{b}$$

qui n'a également qu'une racine positive plus petite que 1. On la traitera à peu près de même que précédemment.

UN THÉORÈME DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE

Par M. **E. Duporcq**, élève ingénieur des Télégraphes.

Soient (C) le cercle circonscrit à un triangle abc, et (c) un des cercles tangents aux côtés de ce triangle. — Transformons la figure par polaires réciproques relativement au cercle (c): la transformée de la circonférence (C) est une conique (Γ) admettant pour foyer le centre ω de (c); le triangle abc a pour corrélatif un triangle $\alpha\beta\gamma$, circonscrit à (Γ) et inscrit à (c), de sorte que les milieux de ses côtés sont les projections du foyer ω sur chacun d'eux. Le cercle prin-

cipal de la conique (Γ) est donc le cercle des neuf points du triangle $\alpha\beta\gamma$: il en résulte que le rayon du cercle (c) est égal à l'axe focal pq de (Γ).

Soient P et Q les points diamétralement opposés de (C) situés sur cet axe : ils sont respectivement conjugués des sommets p et q par rapport à (c). Donc :

$$\overline{\omega P}.\overline{\omega p} = \overline{\omega Q}.\overline{\omega q} = \overline{pq}^2,$$

d'où:

$$\overline{pq} = \overline{PQ}.\frac{\overline{pq}^2}{\overline{\omega P}.\overline{\omega Q}},$$

ou

$$\overline{\omega P}.\overline{\omega Q} = \overline{PQ}.\overline{pq}.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

« *Le produit des diamètres de deux cercles* (C) *et* (c), *le premier circonscrit, le deuxième inscrit à un même triangle, est, en valeur absolue, égal à la puissance, par rapport à* (C), *du centre de* (c). »

Inversement, si cette condition est remplie, il existera une infinité de triangles inscrits à (C) et circonscrits à (c).

En appliquant ce théorème, on a une solution immédiate à la question 689 (*).

CORRESPONDANCE

(A propos de la question 655)

Extrait d'une lettre de M. Lemoine :

La note suivante (**) :

« *En indiquant cette propriété j'avais eu pour objet principal une construction du point de Lemoine. Y en a-t-il de plus simple au point de vue géométrographique?* »

que vous avez mise, à propos de la solution de la question 665

(*) Voyez plus loin cette solution, p. 21.

(**) En plaçant cette note, j'étais presque sûr de provoquer une réponse de mon ami Lemoine. Il trouvera, dans le présent numéro (p. 6), une autre note qui, je l'espère, l'intéressera également. La simplicité géométrographique, telle que l'a conçue M. Lemoine, ou telle qu'on pourra la concevoir en modifiant peut-être certains points, et la simplicité géométrique, sont deux choses très différentes — souvent opposées. — Il importe de signaler encore la distinction qu'il convient de faire entre ces deux ordres de simplicité. Pour éviter toute ambiguïté, on pourrait peut-être les distinguer en les dénommant *simplicité théorique* et *simplicité graphique*.

(*J. E.*, p. 285), me fournit une trop belle occasion de mettre en relief la différence essentielle des points de vue où se placent la géométrie et la géométrographie et l'utilité de cette dernière dans la construction, pour que je ne la saisisse pas.

Indiquons rapidement le nombre brutal d'opérations élémentaires nécessaires pour construire le point de Lemoine, en suivant rigoureusement l'énoncé et en prenant même les constructions *les plus simples*, données par la géométrographie, pour les tracés immédiats nécessaires.

Tracé du cercle circonscrit à ABC. . . .	15	opérations.
Tangente en A à ce cercle	10	—
Les deux parallèles menées par B et C à cette tangente	18	—
Tracé de A′A″ et de Aα	9	

Pour tracer Bβ qui par son intersection avec Aα donnerait le point de Lemoine, il faut recommencer les mêmes constructions, sauf le tracé du cercle circonscrit, soit 37 opérations, en tout 89 opérations élémentaires.

Prenons maintenant cette même construction, mais en la simplifiant, le plus possible, géométrographiquement. Je remarque d'abord que le tracé du cercle circonscrit et celui de la tangente en A sont complètement inutiles; ils font bien dans l'énoncé géométrique, parce qu'ils font image et fixent la construction dans l'esprit, mais le géométrographe qui ne cherche que les points A′ et A″ les obtient en faisant l'angle ACA″ = B et l'angle CBA′ = C — B 16 opérations
en traçant A′A″ et Aα. . . . . 6 —
il obtiendrait de même Bβ, mais avec 20 opérations seulement en prenant la précaution de tracer aussi de A comme centre, dans l'opération faite pour obtenir les angles ACA″ et CBA′, une courbe de même rayon que ceux qu'il vient de tracer de B et de C comme centres. Ce cercle servira pour les opérations nécessaires au tracé de Bβ.

Nous aurons ainsi le point de Lemoine avec 42 opérations au lieu de 89. C'est tout ce que peut donner *géométrographiquement* votre construction géométrique, et les constructions plus simples abondent. Voici la plus simple que je connaisse :

Je trace les perpendiculaires aux milieux de AB et de AC

op : $(4R_1 + 2R_2 + 3C_1 + 3C_3)$. Je fais en A avec AB (en dehors du triangle) un angle égal à C, en utilisant les cercles tracés pour obtenir les médiatrices j'ai cet angle par le symbole . . . . . op : $(2R_1 + R_2 + 3C_1 + C_3)$.

Le côté tracé de cet angle est la tangente en A au cercls circonscrit, elle coupe en B_1 et en C_1 les médiatrices de AB et de AC ; je trace BB_1, CC_1. . . . . op : $(4R_1 + 2R_2)$. Ces deux droites se coupent au point K de Lemoine obtenu ainsi par . . . . . op : $(10R_1 + 5R_2 + 6C_1 + 4C_3)$

Simplicité ou nombre d'opérations : 25 ; exactitude : 16 ; 5 droites, 4 cercles.

BACCALAURÉATS
(OCTOBRE 1895)

Académie de Caen.

BACCALAURÉAT COMPLET

I. Recherche du plus grand commun diviseur de deux ou de plusieurs nombres entiers sans employer la décomposition en facteurs premiers. Théorie de cette recherche.

II. Démontrer que le volume d'un cône droit inscrit dans une sphère est égal : 1° au carré de la surface latérale du cône divisé par trois fois la circonférence d'un grand cercle de la sphère ; 2° au huitième du volume de la sphère multiplié par $(\sin a + \sin 3a)^2$, a désignant l'angle des génératrices du cône avec son axe.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

I. *Questions au choix :* 1° Division de deux polynômes ordonnés par rapport aux puissances décroissantes d'une même lettre.

2° Intersection d'une droite et d'une ellipse.

3° Exposer les propriétés des trièdres supplémentaires.

Problème obligatoire. — Trouver la somme des carrés des n premiers nombres.

Académie de Clermont.

BACCALAURÉAT COMPLET

I. Calculer le côté, l'apothème, la surface d'un octogone régulier inscrit dans un cercle de rayon R.

Solution. — On suit la méthode générale pour calculer le côté d'un polygone régulier inscrit connaissant le côté du polygone régulier inscrit ayant deux fois moins de côtés. On trouve $R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ pour le côté, $\frac{1}{2}R\sqrt{2+\sqrt{2}}$ pour l'apothème, $2R^2\sqrt{2}$ pour la surface.

II. Déterminer trois termes consécutifs d'une progression géométrique connaissant leur somme a et leur produit b^3.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

I. *Questions au choix :* Énoncer et démontrer la propriété fondamentale 1° de la tangente à l'ellipse, 2° de la tangente à la parabole, 3° de la sous-normale à la parabole.

II. *Problème.* — Un triangle isoscèle ABC, dans lequel $AB = AC = b$, rectangle en A tourne autour d'un axe Bx situé dans son plan, passant par le sommet B et ne traversant pas la surface du triangle.

Calculer le volume engendré par ce triangle en fonction de l'angle α que fait l'hypoténuse BC avec l'axe Bx. Déterminer α de façon à rendre ce volume maximum.

Académie de Dijon.

BACCALAURÉAT COMPLET

Soient x, y, z, trois quantités inconnues, on donne leur somme a, la somme de leurs carrés b^2 et celle de leurs cubes c^3. On demande de calculer leur produit.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

I. Même question que pour le baccalauréat complet, et en plus :

II. Théorie de l'extraction de la racine carrée des nombres entiers.

III. Construire les traces d'un plan, connaissant les projections de l'un de ses points et le rabattement du même point sur le plan horizontal après rotation convenable autour de sa trace horizontale.

Académie de Grenoble.

I. *Questions au choix :* 1° Intersection d'une droite avec une parabole définie par son foyer et sa directrice.

2° La tangente à l'ellipse fait des angles égaux avec les rayons vecteurs issus du point de contact.

3° Définir le trièdre T′ supplémentaire d'un trièdre donné T et montrer qu'inversement T est le trièdre supplémentaire de T′.

II. *Problème.* — Dans un trapèze isoscèle ABCD, I et J désignent les milieux des côtés parallèles AB et CD. On donne

le côté $AB = 2a$

— $AD = 2b$

et la relation $IJ + 5DJ = l$, a et l sont deux longueurs données.

Calculer le côté $DC = 2x$ et $IJ = y$.

Discuter en indiquant pour chaque valeur de l le nombre de solutions du problème.

Académie de Lille.

I. *Questions au choix :* 1° Résoudre un triangle, connaissant deux côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.

2° Résoudre un triangle, connaissant les trois côtés.

3° On connaît les distances mutuelles de trois points A, B, C; on mesure les angles $\widehat{AMB}$ et $\widehat{BMC}$. Déterminer les distances MA, MB, MC.

II. *Problème.* — A étant un nombre entier quelconque, démontrer : 1° que $A^3 - A$ est divisible par 3; 2° que $A^7 - A$ est divisible par 7.

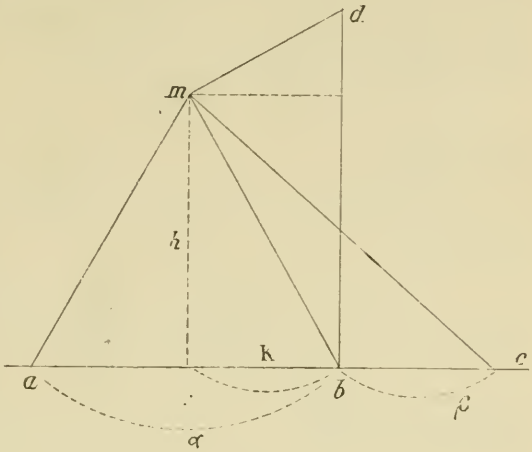
QUESTIONS 634 ET 675

Seconde solution. (*)

On donne les trois points a, b, c *sur une droite. Quel est le lieu d'un point* m, *tel que*

$$\frac{1}{tg\,\mathrm{bma}} + \frac{1}{tg\,\mathrm{cmb}} = \textit{constante}.$$

(Mannheim.)



Conservons la figure de la p 277, en ajoutant (**) une perpendiculaire élevée de b à bm. Cette droite coupe mc au point p et ma au point q.

On a $$\frac{mb}{bp} + \frac{mb}{bq} = \text{constante},$$

ou mb $$\left(\frac{1}{bp} + \frac{1}{bq}\right) = \text{constante}.$$

En vertu d'un théorème connu, ce qui est écrit dans la parenthèse est égal à $\left(\frac{1}{bc} + \frac{1}{ba}\right) \frac{1}{\sin cbm}$. Il vient alors $\frac{mb}{\sin cbm} = \text{constante}$. Donc, etc.

QUESTION 161

Solution par M. J. Chapron, à Bragelogne.

Couper un triangle par une droite de manière que les deux parties de ce triangle soient entre elles dans un rapport donné et qu'elles aient leurs centres de gravité sur une même perpendicu-

(*) Voir page 276 du précédent volume.

(**) Le lecteur est prié de compléter la figure comme on l'indique ici.

laire à la sécante. On résoudra ce problème : 1° lorsque les deux côtés du triangle sont égaux, et en particulier quand le triangle est équilatéral; 2° quand le triangle est quelconque.

(Concours général, 1833.)

Soient x et y les distances du centre de gravité du triangle détaché par la sécante DE aux côtés AB et AC du triangle, a et b celles du centre de gravité de ABC, les distances étant comptées parallèlement à ces côtés.

La première condition revient à

$$xy = K^2$$

et la seconde à

$$x(x-a) - y(y-b) + (ay - bx)\cos A = 0.$$

Quand le triangle est isoscèle, $a = b$, et la deuxième équation devient

$$x^2 - y^2 - a - (x-y) - a(x-y) = 0.$$

ou

$$(x-y)(x+y-a-a\cos A) = 0.$$

On a donc $x = y$, solution évidente *a priori*, ou

$$x + y = a(1 + \cos A).$$

On connaît alors xy et $x + y$.

Quand le triangle est quelconque, la deuxième équation peut s'écrire

$$x^2 - y^2 + y(a + b\cos A) - x(a\cos A + b) = 0.$$

Si l'on élimine y, on a

$$x^4 - (a\cos A + b)x^3 + K^2(a + b\cos A)x^2 - K^4 = 0.$$

On obtiendrait des équations analogues en considérant les triangles détachés dans les angles B et C (*).

QUESTION 652

Seconde solution (**).

On donne une circonférence de cercle et un point dans son intérieur. De ce point, on mène deux droites conjuguées par rapport au cercle. Démontrer que, quelles que soient ces deux droites, la somme

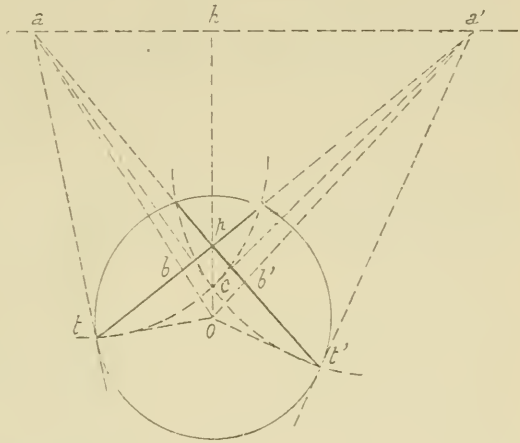
(*) Nous publions cet aperçu de la solution demandée, aperçu que nous avions reçu depuis longtemps et que nous n'avions pas fait paraître, attendant une solution plus complète. Mais une solution élémentaire existe-t-elle? a-t-elle été imprimée dans quelque recueil que nous puissions signaler à nos lecteurs? *G. L.*

(**) Voir page 283 du précédent volume.

des inverses des carrés des cordes que le cercle intercepte sur elles est constante. (Mannheim.)

Soient a, a' la polaire du point donné p, par rapport à la circonférence donnée de centre o. La droite ap est la polaire de a', alors la tangente $a't'$ a son point de contact sur cette droite; de même, t est sur $a'p$.

Appelons b, b' les points de rencontre de ces polaires avec oa, oa'.



Il s'agit de démontrer que

$$\frac{1}{\overline{tb}^2} + \frac{1}{\overline{t'b'}^2} = \text{constante}.$$

Dans le triangle rectangle ato, on a

$$\frac{1}{\overline{tb}^2} = \frac{1}{\overline{to}^2} + \frac{1}{\overline{ta}^2};$$

de même

$$\frac{1}{\overline{t'b'}^2} = \frac{1}{\overline{t'o}^2} + \frac{1}{\overline{t'a'}^2}.$$

D'après cela, il faut démontrer que $\frac{1}{\overline{ta}^2} + \frac{1}{\overline{t'a'}^2} = \text{constante}$.

Les circonférences décrites, de a, a' comme centres, respectivement avec at, $a't'$ pour rayons se coupent à angle droit sur la perpendiculaire oh à aa'. Le point c étant l'un de ces points de rencontre, les droites ca, ca' soient perpendiculaires l'une à l'autre; on a alors

$$\frac{1}{\overline{ca}^2} + \frac{1}{\overline{ca'}^2} = \frac{1}{\overline{ch}^2}.$$

Mais $ca = at$, $ca' = a't'$, et ch est un segment de grandeur invariable. donc, etc.

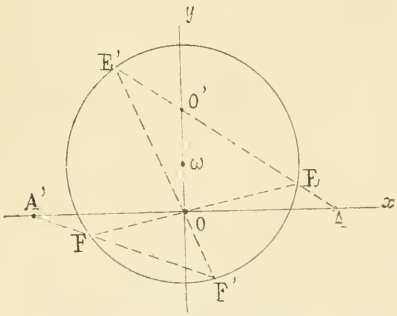
QUESTION 653

Solution par A. Droz-Farny.

On donne deux axes rectangulaires Ox *et* Oy *et un point* A *sur* Ox. *Soit* ω *un point quelconque sur* Oy *et soit* O′ *le symétrique de* O *par rapport à* ω. *Du point* ω, *comme centre, avec* OA *comme rayon, on décrit une circonférence* Δ *qui rencontre* AO′ *aux points* E, E′. *On trace* OE, OE′ *qui coupent* Δ *en* F *et* F′. *La droite* FF′ *passe par le symétrique de* A *par rapport à* O.

(A. Davidoglou.)

Le problème peut être généralisé en prenant O′ quelconque sur Oy, le rayon de Δ étant aussi quelconque. En effet : on sait qu'une transversale rencontre les couples de côtés opposés, les diagonales d'un quadrilatère inscrit dans une conique, ainsi que la conique, suivant quatre couples de points en involution. Or, ici, la transversale Ox rencontre les côtés EE′ et FF′ suivant A, A′; les côtés EF, E′F′, suivant a et a'; le cercle, suivant α et α', enfin, les diagonales EF′, E′F, en leur point d'intersection O; celui-ci est, par conséquent, un point double de l'involution. Comme $O\alpha = O\alpha'$, l'involution est parabolique, il en résulte que



$$Oa = Oa' \qquad \text{et} \qquad OA = OA'.$$

Remarque (*). — La propriété est indépendante du rayon de Δ et de la position de la sécante AA′. On peut l'énoncer de la manière suivante : *On considère un cercle* Δ *et une droite* Ox, O *étant la projection de* Δ *sur* Ox. Les diagonales d'un quadrilatère inscrit à Δ et dont deux côtés opposés se rencontrent en

(*) Cette remarque est de M. Tzitzéica.

O coupent Ox en deux points symétriques par rapport à O. La propriété s'applique aux deux autres côtés opposés du quadrilatère.

Nota. — Solution analogue par M. Foucart.

QUESTION 689

Solution par M. Duporcq (*).

On donne une sphère, une de ses cordes et un point arbitraire o *sur cette corde. Par* ab, *on mène un plan quelconque qui coupe la sphère suivant le petit cercle* C.

Démontrer qu'on peut inscrire dans C *une infinité de triangles qui soient en même temps circonscrits à un cercle de centre* o. *Si* l, m, n, *sont les côtés d'un de ces triangles, faire voir que* $\frac{1}{lm} + \frac{1}{ln} + \frac{1}{mn}$ *est constant, quel que soit le triangle et quel que soit le plan mené par* ab. (Mannheim.)

Soit, en effet, C, un cercle de la sphère, dont le plan passe par le point O; désignons par D son diamètre; le cercle de centre O et de diamètre d, tel que le produit Dd soit égal à la puissance du point O par rapport à la sphère, sera inscrit à une infinité de triangles inscrits à C. Soit $2p$ le périmètre de l'un d'eux, et S sa surface :

$$\frac{1}{lm} + \frac{1}{ln} + \frac{1}{mn} = \frac{2p}{lmn} = \frac{2p}{2\mathrm{D}.\mathrm{S}} = \frac{2p}{\mathrm{D}.d.p} = \frac{2}{\mathrm{D}d}.$$

L'expression considérée est donc égale, en valeur absolue, au double de l'inverse de la puissance du point O par rapport à la sphère.

QUESTIONS PROPOSÉES

697. — On donne un plan et un point O fixes. Par O, on mène un plan arbitraire et une perpendiculaire à ce plan. Sur cette droite, on prend des points à des distances de O égales

(*) Voyez plus haut, page 12, le théorème sur lequel repose la démonstration qui suit.

à la distance du point O à l'intersection du plan arbitraire et du plan fixe. Quelle est la surface (S) lieu des points ainsi obtenus, lorsqu'on fait varier le plan arbitraire ?

(Mannheim.)

698. — On donne un point O et la surface (S) de la question précédente. Par O, on mène un plan arbitraire et une perpendiculaire à ce plan. Sur cette droite, on prend des points à des distances de O égales aux distances de ce point O à l'intersection du plan arbitraire et de (S).

Quelle est la surface lieu des points ainsi obtenus, lorsqu'on fait varier le plan arbitraire? *(Mannheim.)*

699. — Soit AB une corde quelconque d'une parabole P, parallèle à la tangente en un point fixe C de P.

Par les points A et B on fait passer une circonférence tangente en D à la tangente fixe du point C.

Le diamètre du point C coupe AB en L et la circonférence en M;

LM est égale au double du rayon de courbure de C.

(Droz-Farny.)

700. — On donne un triangle ABC; sur BC, dans le sens BC, on porte $BB' = t$; sur CA, dans le sens CA, $AA' = t$. En supposant t variable, trouver le lieu décrit par le point de concours des droites AB', BA'.

Ce lieu est une droite γ; elle rencontre AB en γ'. En considérant les points analogues $\alpha'\beta'$, on demande de démontrer que les trois points sont en ligne droite.

(G. L.)

Nous avons reçu de M. Plackowo (à Tokarewka, gouvernement de Tamboff) la question suivante. Nous lui avons envoyé la solution qu'il désirait avoir de cette règle curieuse, pratiquée par les paysans russes, règle qui évite la connaissance de la table de Pythagore. Cette démonstration est basée sur le *système binaire de numération*. Mais peut-être un de nos correspondants trouvera-t-il une solution plus simple.

Dans tous les cas, il nous a paru intéressant de faire connaître cette règle.

Multiplication russe. — Les paysans russes, quand ils doivent effectuer une multiplication, procèdent ordinairement de cette manière; si, par exemple, il leur faut multiplier 35 par 42, ils divisent le multiplicande par 2, et en même temps doublent le multiplicateur, et si le multiplicande est impair, ils marquent le multiplicateur par un signe.

Si, par exemple, ils multiplient 35 par 42, ils écrivent un nombre à côté de l'autre

35	42	+
17	84	+
8	168	
4	336	
2	672	
1	1344	+

Additionnons les nombres marqués du signe +, nous aurons une somme égale à 1470; ce qui est exact. Je voudrais savoir la raison? *(Plackowo.)*

RAPPEL DE QUESTIONS NON RÉSOLUES (*)

2. *(1882.)* — **Sur les côtés d'un triangle donné** ABC, **on construit trois triangles semblables** ABC_1, BCA_1, CAB_1, **tels que les droites** AA_1, BB_1, CC_1 **concourent en un même point** D. **Démontrer que les points** A_1, B_1, C_1, **décrivent chacun une circonférence.** *(J. Neuberg.)*

23. *(1882.)* — **Sur une tangente à la sphère** O, **on prend deux points** S **et** S′ **tels que** OS − OS′ = R. **Ces deux points sont les sommets de deux**

(*) Notre ami M. Brocard nous a signalé un certain nombre de questions, autrefois proposées dans ce Journal, et qui n'ont pas été résolues.

Il pense, et j'espère avec lui, qu'en reproduisant ces énoncés anciens, et forcément oubliés, des solutions se présenteront, rédigées par de nouveaux lecteurs.

Peut-être aussi, les auteurs de ces questions pourront-ils nous adresser la solution qu'ils avaient en vue, si elle est encore présente à leur esprit.

G. L.

cônes circonscrits à la sphère. Déterminer la position des points S et S′ de façon que le volume compris entre les deux cônes et la sphère soit égal à un volume donné.

119. *(1883).* — On donne le triangle ABC et le rayon r du cercle inscrit. Soient A′, B′, C′, les points de contact du cercle inscrit avec les côtés du triangle (A′ sur BC, etc.) On pose $AC' = \alpha$, $BA' = \beta$, $CB' = \gamma$. Par le point L pris sur le cercle inscrit, on mène une tangente $A_1B_1C_1$ (le point A_1 étant sur BC, etc.). On pose $LA_1 = x$, $LB_1 = y$, $LC_1 = z$; quelle relation y a-t-il : 1° entre x et y; 2° entre x et z; 3° entre y et z; 4° entre x, y, z. En conclure la formule $S = \frac{\alpha\beta\gamma}{r}$, S désignant la surface du triangle ABC.

(X. Antomari.)

148. *(1884.)* — On donne deux droites fixes, et un cercle, de centre O, tangent à ces deux droites. Soit AB une tangente variable de ce cercle, et qui rencontre en A et B les deux droites fixes; soit H le point de concours des hauteurs du triangle OAB. Démontrer que le cercle des neuf points du triangle OAB enveloppe deux cercles, et que le cercle circonscrit au triangle AHB enveloppe aussi deux cercles fixes. *(Weill.)*

(A suivre.)

Nota. — Nous avons reçu, trop tardivement pour pouvoir les mentionner dans le précédent numéro, de bonnes solutions des questions 638, 639, 640, de M. Foucart; une solution de la question 635 par M. G. Tzitzeica; enfin, de MM. L'Huilier et Tzitzeica, une solution de la question 650.

Le Directeur-gérant,
G. de LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 25298-12-95.

ÉTUDE SUR L'INVOLUTION GÉNÉRALISÉE

Par M. **A. Noyer**, élève à l'École polytechnique, et M. **Ch. Michel**, élève à l'École normale supérieure.

(*Suite*, voir page 7.)

6. *Théorème de Frégier.* — Considérons un trièdre variant en involution dont le sommet est un point O d'une quadrique et dont les arêtes rencontrent la quadrique en A, B, C.

Quand le trièdre varie en conservant une même arête OA, le couple des arêtes OB et OC varie en involution dans le plan conjugué de l'arête OA, qui rencontre la quadrique suivant une conique. En vertu du théorème de Frégier dans le plan, la droite BC passe par un point fixe et par suite le plan ABC passe par une droite fixe.

Quand la droite OB prend la direction de la tangente OT à la conique, le plan conjugué AOC coïncide avec le plan ABC, passe donc par la droite fixe, et, la droite OT étant dans le plan tangent en O à la quadrique, contient la droite conjuguée du plan tangent.

Le plan ABC rencontre donc cette droite en un point qui est le même pour les positions du trièdre O(ABC) qui ont une arête OA commune; donc il est le même pour toutes les positions du trièdre. C'est le théorème de Frégier dans l'espace.

7. *Théorème de Faure.* — Considérons un triangle ABC variant en restant autopolaire par rapport à une conique de centre O.

Lorsqu'il se déforme en conservant un sommet fixe A, le couple des autres sommets B et C varie en involution binaire sur la polaire du point A; ω étant le point d'intersection de cette polaire avec la droite qui joint le point A au centre de la conique, le produit $\omega B \cdot \omega C$ est constant. Les points ω et A et par suite tous les points de la droite $A\omega$ ont donc

une puissance constante par rapport au cercle variable qui passe par les points A, B, C. La puissance du centre de la conique par rapport au cercle circonscrit au triangle ABC ne change donc pas quand il se déforme en conservant un sommet fixe; en vertu du théorème général, elle est la même pour toutes les positions du triangle. C'est le théorème de Faure.

M. de Jonquières fait cette remarque :

De même que dans l'involution binaire de deux points, le point central est le centre radical commun à tous les cercles qui passent par deux points conjugués ; de même, dans l'involution ternaire de trois points, le centre de la conique de base est le centre radical commun à tous les cercles qui passent par trois points conjugués.

La démonstration que nous donnons met bien en évidence la raison de cette analogie.

Voici d'autres théorèmes sur les triangles conjugués à une conique.

8. — La puissance du centre O de la conique par rapport au cercle qui passe par les pieds α, β, γ des perpendiculaires abaissées de ce point sur les côtés d'un triangle ABC ne change pas quand le triangle varie en restant conjugué à la conique.

Il suffit de le montrer *quand le triangle conjugué varie en conservant un sommet* A *fixe*. Alors, les points β et γ décrivent le cercle construit sur AO comme diamètre; d'autre part, le couple des droites AB et AC variant en involution, il en est de même du couple des droites $O\beta$ et $O\gamma$, et, par suite, d'après le théorème de Frégier, la droite $\beta\gamma$ passe par un point fixe ω. La puissance de ce point ω par rapport au cercle variable $\alpha\beta\gamma$, qui est égale à sa puissance par rapport au cercle de diamètre AO, est donc constante; il en est de même du point α qui est fixe et, par suite, de tout point de la droite $\alpha\omega$. Le théorème est démontré s'il est établi que cette droite passe par le point O. Or, quand, le triangle ABC variant, la droite AC devient parallèle à la polaire du point A, la droite AB coïncide avec la droite AO; le point β vient

donc en O tandis que le point γ vient sur la droite $O\alpha$, qui coïncide alors avec la droite $\beta\gamma$ et passe conséquemment par le point ω. En d'autres termes, la droite $\omega\alpha$ passe par le point O.

9. — Le cercle qui passe par les pieds α, β, γ des perpendiculaires abaissées sur les côtés d'un triangle variable ABC conjugué à une parabole d'un point O de la directrice passe par le foyer *(Laguerre)*.

Le triangle ABC *variant en conservant un sommet* A *fixe,* le couple des droites $O\beta$ et $O\gamma$ perpendiculaires aux droites AB et AC varie en involution, et, comme les points β et γ se déplacent sur le cercle décrit sur OA comme diamètre, la droite $\beta\gamma$ passe par un point fixe ω qui a une puissance constante par rapport au cercle variable $\alpha\beta\gamma$.

Le lieu du centre du cercle circonscrit au triangle ABC étant la directrice (théorème de Faure), pour une position du triangle ABC, le centre est en O; alors la droite $\beta\gamma$ joint les milieux des côtés AB et AC et coïncide avec la tangente a la parabole parallèle à BC. Le point ω est sur la tangente. D'autre part, quand la droite AB devient parallèle à cette tangente, la droite AC devient le diamètre de la parabole qui passe par le point A et le point de contact de la tangente; le point γ est le point d'intersection de ce diamètre et de la directrice et le point β vient sur la droite $O\alpha$, symétrique du point α par rapport à la tangente. La droite $\omega\alpha$ passe donc par le symétrique du point γ par rapport à cette tangente, c'est-à-dire par le foyer.

La puissance du foyer par rapport au cercle variable $\alpha\beta\gamma$ est donc la même pour toutes les positions du triangle qui ont un sommet fixe et par suite pour toutes les positions du triangle, d'après le théorème fondamental. De plus, elle est nulle, car si nous considérons en particulier un triangle conjugué qui a un sommet au foyer, le cercle $\alpha\beta\gamma$ passe par ce point.

10. — Comme nous l'avons vu, quand le cercle circonscrit au triangle a son centre O, le cercle $\alpha\beta\gamma$ devient le cercle des

neuf points et par suite le cercle des neuf points d'un triangle conjugué à la parabole passe par le foyer. Nous pouvons démontrer ce théorème directement.

Quand le triangle ABC *varie en conservant un sommet* A *fixe*, les milieux β et γ des côtés qui passent par A se déplacent sur la tangente à la parabole parallèle à BC. Le couple des points β et γ varie en involution binaire, le point central ω de l'involution étant sur le diamètre qui passe par le point A, c'est-à-dire le point de contact de la tangente. Le cercle des neuf points qui passe par les points β et γ passe par le point fixe qui est le pied I de la perpendiculaire abaissée de A sur sa polaire BC. Les cercles des neuf points des triangles conjugués qui ont un sommet A commun ont même axe radical, la droite ωI, qui est symétrique du diamètre passant par le point A par rapport à la tangente en ω. Donc cette droite passe par le foyer.

Ainsi, le foyer a une même puissance par rapport aux cercles des neuf points des triangles qui ont un même sommet, donc par rapport à ceux de tous les triangles. Cette puissance est d'ailleurs nulle; considérons en effet un triangle conjugué qui a un sommet au foyer; il est rectangle en ce point; donc son cercle des neuf points y passe.

11. — On sait que deux trièdres trirectangles qui ont même sommet sont les extrémités d'une chaîne de quatre trièdres trirectangles de même sommet, dans laquelle deux trièdres consécutifs quelconques ont une face commune. Transportons ces quatre trièdres parallèlement à eux-mêmes de façon que leurs faces soient tangentes à la quadrique. Nous voyons ainsi que deux trièdres trirectangles dont les faces sont tangentes à la quadrique forment avec deux autres trièdres trirectangles circonscrits une chaîne dans laquelle deux trièdres consécutifs quelconques ont une face commune.

Le résultat s'étend à des trièdres d'une involution ternaire quelconque.

En voici quelques applications :

12. *Théorème de Monge.* — Considérons un trièdre trirectangle variable dont les faces sont tangentes à une quadrique. *Quand*

il varie en conservant une même face, les deux autres restent parallèles à une perpendiculaire à la face fixe et par suite sont tangentes au cylindre circonscrit à la quadrique dont les génératrices sont parallèles à cette direction. Les traces des faces variables sur la face fixe sont tangentes à la section droite du cylindre par cette face; elles sont de plus rectangulaires; le sommet du trièdre est donc à une distance constante d'un point de l'axe du cylindre et en particulier du centre O de la quadrique qui est sur cet axe.

On voit donc que la distance du sommet du trièdre au centre de la quadrique est la même quand le trièdre varie en conservant une face; donc, d'après ce qui précède, elle est la même dans toutes les positions du trièdre. C'est le théorème de Monge.

13. *Généralisation du théorème de Monge.* — Dans la remarque du paragraphe 11, nous pouvons déplacer les quatre trièdres trirectangles parallèlement à eux-mêmes de manière que les faces de chacun d'eux deviennent respectivement tangentes à trois quadriques homofocales.

Cela posé, considérons un trièdre trirectangle variable dont les faces sont respectivement tangentes à trois quadriques homofocales. *Quand il varie en conservant une face* tangente à l'une de ces quadriques, les deux autres faces restent parallèles à une perpendiculaire à la face fixe et par suite sont respectivement tangentes aux cylindres circonscrits aux deux autres quadriques dont les génératrices sont parallèles à cette direction. Les traces des faces variables sur la face fixe sont respectivement tangentes aux sections droites des cylindres par cette face qui sont, d'après un théorème connu, des coniques homofocales; comme les deux traces sont rectangulaires, le sommet du trièdre décrit une circonférence, c'est la généralisation du théorème de Monge dans le plan ; et le centre de cette circonférence est un point de l'axe commun des deux cylindres, qui passe par le centre O des quadriques homofocales. Le sommet du trièdre variable est donc à une distance constante de ce point O, quand le trièdre conserve une face fixe. D'après la remarque préliminaire, cette distance est

la même pour toutes les positions du trièdre trirectangle variable.

14. *Théorème.* — Considérons un trièdre variable dont les faces sont tangentes à une quadrique et sont parallèles à trois plans diamétraux conjugués de cette quadrique. — *Quand il varie en conservant une face fixe*, les deux autres restent parallèles au diamètre conjugué de la direction de cette face et par suite sont tangentes au cylindre circonscrit à la quadrique dont les génératrices sont parallèles à ce diamètre. Le plan de la courbe de contact du cylindre avec la quadrique est parallèle à la face fixe; les traces des faces variables sur ce plan sont tangentes à la courbe de contact et sont parallèles à deux diamètres conjugués de cette conique. *Le point d'intersection décrit donc une conique homothétique et concentrique :* c'est un théorème connu de géométrie plane. Le lieu du sommet du trièdre est la projection de cette conique sur le plan de la face fixe, parallèlement aux génératrices du cylindre.

Considérons le cône qui a pour sommet le centre de la quadrique et pour base le lieu du sommet du trièdre, tracé sur la face fixe. Ce cône et le cylindre sont coupés suivant deux coniques homothétiques et concentriques par tout plan parallèle à la face fixe. Un tel plan donne, d'ailleurs, dans la quadrique et le cylindre, deux sections homothétiques et concentriques ; il détermine, par suite, dans le cône et la quadrique deux coniques homothétiques et concentriques. Ces deux courbes coïncideront si le plan considéré est mené par un point de l'intersection du cône et de la quadrique. De sorte que le cône rencontre la quadrique suivant deux coniques situées dans des plans parallèles à la face fixe.

Il en résulte que le rayon vecteur qui va du centre de la quadrique au sommet du trièdre variable est partagé par la quadrique dans un rapport constant, quand le trièdre varie en conservant une face fixe; il l'est aussi, d'après la remarque du paragraphe 11, dans toutes les positions du trièdre; c'est-à-dire que le *lieu du sommet du trièdre est une quadrique homothétique et concentrique.*

15. *Généralisation du théorème précédent.* — Considérons un trièdre variable dont les faces sont respectivement tangentes à trois quadriques homothétiques et ayant un même centre O, et sont parallèles à trois plans diamétraux conjugués de ces quadriques.

Quand il varie en conservant une face fixe tangente à l'une de ces quadriques, les deux autres faces restent parallèles au diamètre conjugué de la direction de cette face et par suite sont respectivement tangentes aux cylindres circonscrits aux deux autres quadriques dont les génératrices sont parallèles à ce diamètre. Les courbes de contact des cylindres et des quadriques sont, dans le plan parallèle à la face fixe qui passe par le centre O, des coniques homothétiques et concentriques; les traces des faces variables sur ce plan sont respectivement tangentes aux courbes de contact et sont parallèles à deux diamètres conjugués de ces coniques. *Le point d'intersection décrit donc une conique homothétique et concentrique :* c'est un théorème connu de géométrie plane. Le lieu du sommet du trièdre est la projection de cette conique sur le plan de la face fixe, parallèlement aux génératrices des cylindres.

Comme précédemment, considérons le cône qui a pour sommet le centre O et pour base le lieu du sommet du trièdre dans la face fixe. Ce cône et les cylindres sont coupés suivant deux coniques homothétiques et concentriques par tout plan parallèle à la face fixe ; un tel plan donne, d'ailleurs, dans la quadrique tangente à cette face et les cylindres deux sections homothétiques et concentriques; il détermine donc dans cette quadrique et le cône deux coniques homothétiques et concentriques. Ces deux courbes coïncideront si le plan considéré est mené par un point de l'intersection du cône et de la quadrique. De sorte que le cône rencontre la quadrique suivant deux coniques situées dans des plans parallèles à la face fixe.

Il en résulte, comme précédemment, que le lieu du sommet du trièdre variable est une quadrique homothétique et concentrique.

16. *Autre méthode de démonstration.* — Considérons un triangle ABC d'une involution ternaire et faisons-lui corres-

pondre une conique Q circonscrite, déterminée d'ailleurs par des conditions indépendantes du triangle. Il s'agit de trouver une propriété commune à deux coniques Q et Q′ correspondant aux triangles ABC et A′B′C′ qui sont deux triangles quelconques de l'involution.

D'après le théorème de Poncelet, ω étant un point commun aux deux coniques, on peut leur inscrire respectivement deux triangles $\omega\alpha\beta$ et $\omega\alpha'\beta'$. Les coniques qui correspondent à ces deux triangles sont évidemment les coniques Q et Q′, de sorte que nous sommes ramenés à chercher la propriété commune à deux coniques qui correspondent à deux triangles de l'involution ayant un même sommet : *c'est le résultat auquel nous aurait conduits l'application du premier théorème fondamental.*

Nous pouvons remplacer corrélativement les triangles par des trièdres, les coniques par des cônes. De même, nous pouvons faire un raisonnement analogue sur des coniques et des cônes inscrits dans les triangles et les trièdres.

17. *Applications.* — 1° Considérons un triangle ABC variant en involution et faisons-lui correspondre le cercle qui lui est circonscrit, d'où une seconde démonstration du théorème de Faure.

2° Considérons un trièdre variant en involution dont le sommet est un point O d'une quadrique et dont les arêtes rencontrent la quadrique en A, B, C. Nous pouvons lui faire correspondre le cône qui a pour sommet le point O et pour base la conique de la quadrique qui passe par les points A, B, C; d'où une seconde démonstration du théorème de Frégier.

3° Considérons un trièdre trirectangle dont le sommet est au centre O d'une quadrique et dont les arêtes rencontrent la quadrique en A, B, C. Nous pouvons lui faire correspondre le cône qui a pour sommet le point O et pour base la conique d'intersection de la quadrique par le plan ABC. La remarque précédente nous permet d'en déduire une seconde manière de montrer que la distance du centre O au plan ABC est constante.

18. — Considérons maintenant les cônes circonscrits à une quadrique, auxquels on peut circonscrire un trièdre dont les faces sont parallèles à celles d'un trièdre d'une involution ternaire. Cherchons une propriété commune de leurs sommets. Deux de ces cônes, étant circonscrits à une même quadrique, ont un plan tangent commun. Comme, d'après le théorème de Poncelet, on peut leur circonscrire une infinité de trièdres parallèles à ceux de l'involution, on peut en particulier circonscrire à chacun d'eux un trièdre dont une face coïncide avec le plan tangent. En conséquence, nous sommes ramenés à trouver la propriété commune aux sommets des trièdres circonscrits à la quadrique et parallèles aux trièdres de l'involution, dans le cas particulier où ces trièdres ont une face commune. Nous l'avons trouvée lorsque l'involution a pour cône de base un cône isotrope et lorsque son cône de base est le cône asymptote de la quadrique. Ce qui nous donne une seconde manière d'établir le théorème de Monge et celui du paragraphe 14. *(A suivre.)*

VOLUME DES SEGMENTS

DE SPHÈRE, D'ELLIPSOÏDE ET D'HYPERBOLOÏDES

Par F. J.

La formule qui donne le volume d'un segment sphérique, en fonction de la hauteur et de la section équidistante des bases, ou

$$(1) \qquad v = \pi h\left(\rho^2 - \frac{h^2}{12}\right),$$

dans laquelle ρ est le rayon de la section équidistante, *est fort remarquable* : elle méritait bien d'être rappelée *(J. M. E.*, 1895, p. 242).

Cette formule est due à Maclaurin *(Traité des fluxions*, traduit par le R. P. Pézenas, page xxv de l'Introduction). De nos jours, elle a été retrouvée par M. Desboves *(Questions de Géométrie)*, et reproduite en 1875 et 1878 dans les *Éléments de Géo-*

métrie, par F. I. C. Le théorème a été développé et complété, en 1877, dans l'*Appendice aux Exercices de Géométrie*, par F. I. C. Voici les principaux résultats indiqués aux n°s 833, 843, 844 et 848.

1° La formule (1) peut s'écrire

$$(2) \qquad v = \pi\rho^2 h - \frac{\pi h^3}{12}.$$

Ainsi : *Le segment sphérique est équivalent au cylindre de même hauteur, dont la base est la section équidistante des deux bases du segment*, moins *la moitié de la sphère qui a pour diamètre la hauteur du segment.*

2° Le volume du segment des hyperboloïdes équilatères, soit à une nappe, soit à deux nappes, est donné par la formule :

$$(3) \qquad v = \pi h\left(\rho^2 + \frac{h^2}{12}\right).$$

Ainsi : *Tout segment d'hyperboloïde équilatère est équivalent au cylindre de même hauteur, ayant pour base la section équidistante des deux bases du segment*, plus *la moitié de la sphère qui a pour diamètre la hauteur du segment.*

3° Les segments correspondants des corps engendrés par une ellipse, une parabole, une hyperbole ayant même axe de rotation, même sommet, même paramètre, sont donnés par la formule :

$$(4) \qquad v = \pi h\left(\rho^2 + \frac{qh^2}{12}\right).$$

On sait que les coniques ont pour équation :

$$y^2 = 2px + qx^2;$$

en posant $p = \frac{b^2}{a}$, et $q = -\frac{b^2}{a^2}$, $= 0$, $= +\frac{b^2}{a^2}$ suivant le genre de la courbe; ainsi : *Le segment parabolique est la moyenne arithmétique des segments correspondants elliptique et hyperbolique.*

4° Les segments d'ellipsoïde et d'hyperboloïde à deux nappes, engendrées par les courbes

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

en tournant autour de OX, sont donnés par les formules

$$(5) \qquad v = \pi\rho^2 h - \frac{\pi h^3}{12} \cdot \frac{b^2}{a^2},$$

$$(6) \qquad v = \pi\rho^2 h + \frac{\pi h^3}{12} \cdot \frac{b^2}{a^2}.$$

L'ellipsoïde $\frac{\pi h^3}{6} \cdot \frac{b^2}{a^2}$ dont on retranche, ou auquel on ajoute la moitié est semblable au proposé.

5° On obtient des formules analogues, lorsque les trois axes sont inégaux, ainsi que pour l'ellipsoïde, on aurait :

$$(7) \qquad v = \pi\rho\rho' h - \frac{\pi h^3}{12} \cdot \frac{bc}{a^2},$$

ρ et ρ' étant les demi-axes de la section équidistante.

6° Les segments d'ellipsoïde et d'hyperboloïde à une nappe, engendrés par les courbes

$$\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

en tournant autour de l'axe non transverse de l'hyperbole, sont donnés par les formules

$$(8) \qquad v = \pi\rho^2 h - \frac{\pi h^3}{12} \cdot \frac{a^2}{b^2},$$

$$(9) \qquad v = \pi\rho^2 h + \frac{\pi h^3}{12} \cdot \frac{a^2}{b^2}.$$

7° *Une série d'hyperboles ayant les deux mêmes asymptotes tournent, ainsi que ces droites, autour de* OX ; *elles engendrent des hyperboloïdes à deux nappes, le cône asymptote et des hyperboloïdes à une nappe; les segments obtenus, en coupant le système par des plans perpendiculaires à* OX, *sont équivalents entre eux, lorsqu'ils ont même hauteur et même section équidistante.*

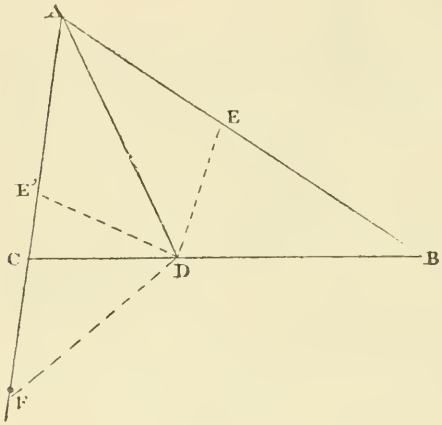
8° Le calcul intégral conduit *directement* aux formules ci-dessus, lorsqu'on met l'origine au milieu de la hauteur du segment, et qu'on prend l'intégrale définie, en faisant varier x de $-\frac{h}{2}$ à $+\frac{h}{2}$. (Voir *Appendice* F. I. C.; n° 892. — L'historique de la question est donné dans les *Exercices de Géométrie*, F. I. C. ou F. J., n° 1933.)

DÉMONSTRATION

D'UNE PROPOSITION CONDUISANT A LA RELATION ENTRE LES TROIS CÔTÉS D'UN TRIANGLE ET UNE BISSECTRICE

Par M. **Lauvernay**.

Théorème. — *Si par le pied* D *de la bissectrice intérieure de l'angle* A *d'un triangle* ABC, *on mène* DE *perpendiculaire à la bissectrice intérieure de l'angle* B *et* DF *perpendiculaire à la bissectrice extérieure de l'angle* C, *la bissectrice* AD *est moyenne géométrique entre les segments* AE, AF.



Soit E′ le point symétrique de E par rapport à AD, on a

$$AE' = AE$$

et $\widehat{AE'D} = \widehat{AED}$

$$= 1^d + \frac{B}{2};$$

d'autre part

$$ADF = \frac{C}{2} + \widehat{CDA}$$

$$= \frac{C}{2} + \frac{A}{2} + B$$

$$= 1^d + \frac{B}{2}.$$

Les droites DE′, DF sont donc antiparallèles par rapport à l'angle DAC, par conséquent $\overline{AD}^2 = AE'.AF = AE.AF$.

Corollaire. — *On a*

$$bc = DB.DC + \overline{AD}^2.$$

Car

$$\overline{AD}^2 = (AB - BD)(AC + CD) = bc - BD.CD + (c.CD - b.BD),$$

or

$$c.CD = b.BD,$$

donc, etc.

Calcul de AD :

On a $$AE = c - BD = c - \frac{ac}{b+c} = \frac{2c(p-a)}{b+c},$$

$$AF = Cb + D = b + \frac{ab}{b+c} = \frac{2bp}{b+c},$$

d'où $$\overline{AD}^2 = \frac{4bcp(p-a)}{(b+c)^2}.$$

On fera une démonstration analogue pour la bissectrice extérieure.

LA MULTIPLICATION RUSSE

Par M. **Goyens.**

La démonstration de la règle de multiplication des paysans russes, indiquée (p. 23), me semble très simple.

Il suffit, en effet, d'observer que le produit ne change pas si, divisant le multiplicande par 2, on multiplie le multiplicateur par 2. Quand le multiplicande est pair, le produit n'a donc pas changé, tandis que si l'on a un multiplicande impair, dans le multiplicande suivant on néglige ½, ce qui revient à négliger le multiplicateur précédent.

Exemple : $35 \times 42 = 17\frac{1}{2}.84 = 17.84 + 42 = 8\frac{1}{2}.168 + 42$
$= 8.168 + 84 + 42 = 4.336 + 84 + 42$
$= 2.672 + 84 + 42 = 1.1.344 + 84 + 42 = 1\,470.$

BIBLIOGRAPHIE

Exercices de Géométrie comprenant l'*exposé des méthodes Géométriques* et *2.000 questions résolues*, par F. J. (3e édit., — Tours, A. Mame et fils, — Paris, Ch. Poussielgue, 15, rue Cassette).

J'ai dit autrefois tout le bien que je pensais de cet ouvrage; la lecture que je viens de faire de la troisième édition m'a singulièrement confirmé dans cette opinion. Je suis persuadé que les professeurs à qui ce livre est inconnu me sauront gré de leur signaler un recueil où

ils trouveront une exposition fort nette et très complète de l'ensemble des propriétés géométriques élémentaires découvertes en ces dernières années. L'ouvrage est rempli de renseignements bibliographiques qui permettront aux esprits curieux de remonter aux sources originales et de compléter ainsi leur instruction sur les points qui leur paraîtront plus particulièrement intéressants.

L'auteur a bien voulu reconnaître que le *Journal de Mathématiques* avait été, en France, le propagateur énergique de la géométrie du triangle. Je le remercie de cette appréciation et je la crois, en effet, très exacte; du moins si l'effet produit a été en rapport avec l'intention et l'effort de volonté que, pour ma part, j'ai appliqué dans la circonstance rappelée.

La *Société d'Éditions scientifiques* (4, rue Antoine-Dubois), poursuivant la publication dont nous avons récemment parlé, vient de faire paraître :

1° **La Cosmographie**, par M. E. Jablonski, professeur agrégé au lycée Charlemagne.

Cet ouvrage [à l'usage des candidats aux baccalauréats de l'enseignement secondaire (*)] est un résumé, qui nous a paru très bien ordonné, du cours classique de cosmographie, tel, autant qu'il nous souvient, qu'il était autrefois enseigné, et qui ne paraît guère avoir été soumis aux innovations. Nous n'en sommes pas autrement surpris. On peut, en effet, changer bien des programmes, multiplier les baccalauréats de nuances diverses et les expériences pédagogiques; mais il paraît difficile de modifier le cours élémentaire de cosmographie. Celui-là, plus heureux que d'autres, semble, pour longtemps, à l'abri des réformes.

2° **La Géométrie descriptive** (**), par M. L. Gérard, docteur ès sciences, professeur agrégé au Lycée Ampère.

3° Un **Précis de sciences naturelles** *(Anatomie et physiologie animales et végétales)* à l'usage des candidats à l'Institut national agronomique, à l'École normale secondaire de Sèvres, etc.; par M. J. Anglas, licencié ès-science physiques et ès-sciences naturelles.

Nous signalerons encore dans ce bulletin bibliographique quelques ouvrages pouvant intéresser nos lecteurs.

D'abord, deux livres de M. P. Brasseur, professeur à l'École normale de Lierre (Belgique) :

1° **Note sur la décomposition en facteurs des quantités algébriques,** suivie d'une *Note sur la discussion des problèmes du premier degré* (8e édition, revue et augmentée : prix 1 fr. 10 c., chez l'auteur, 8, rue Rodolphe, à Anvers).

2° **Notions sur la résolution des problèmes de construction** (5e édition, prix 2 francs).

(*) *Classique*, 1e partie; 2e partie; 2e série,
Moderne, — — 2e et 3e séries (prix : 0 fr. 75).

(**) Deux volumes :

L'un à l'usage des candidats aux baccalauréats de l'enseignement secondaire moderne (2e partie, 2e série);

L'autre, à l'usage des candidats aux baccalauréats de l'enseignement secondaire : *classique*; 2e partie, 2e série, et *moderne*, 1e partie, 2e partie, 2e série (prix 1 fr. 75 c.).

Ces deux volumes, qui ont eu, en Belgique, un grand succès, succès très mérité, d'ailleurs, nous paraissent devoir intéresser plus particulièrement l'enseignement des Écoles normales primaires.

Puis :

1° Une note de M. J. Boyer, professeur de sciences mathématiques et physiques à Paris, sur le mathématicien François-Joseph Servois.

Ceux qui connaissent notre *Géométrie de la Règle et de l'Equerre* savent que nous y avons mis en lumière, à propos du livre de Servois que nous avons eu souvent occasion de citer, au cours de ce travail, le grand mérite de ce professeur mathématicien aujourd'hui oublié !

M. Boyer, dans la brochure citée, a remis en lumière les mérites, modestes sans doute, mais très réels, de Servois. Nous nous associons pleinement au jugement qu'il a porté sur ce géomètre.

2° Une petite brochure du général Frolov, membre de la Société mathétique de France (librairie Gauthier-Villars, 2e tirage, complété), relative à la démonstration de l'Axiome XI d'Euclide.

Le général Frolov est un euclidien déterminé et il cite dans sa préface ces paroles tirées des *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale de M. Méray.* « Le seul secret des choses qui existent est trop difficile à pénétrer pour qu'il puisse être bien sage à nous de lâcher la proie pour l'ombre en consumant nos efforts dans les conquêtes d'un monde imaginaire. »

Nous-même (*J. M. S.* 1893, p. 158), ayant eu l'occasion de manifester notre opinion sur ce sujet, nous avons exprimé notre pensée sur les recherches non-euclidiennes et sur quelques autres dans des termes que nous demandons la permission de reproduire ici :

« Je n'ai jamais été partisan de la géométrie non-euclidienne, parce que je ne crois pas utile de perdre de vue, dans les spéculations mathématiques, le champ réel. Si l'on consent à l'abandonner à un instant donné, et l'on est parfois contraint de le faire, ce doit toujours être avec l'arrière-pensée de revenir aux applications ; enfin, l'excursion faite dans le champ idéal doit, pour être vraiment digne de notre attention, servir tôt ou tard à des faits positifs, susceptibles d'être utilisés dans la géométrie euclidienne et dans toutes les sciences qui s'y rattachent : la Mécanique, l'Astronomie, etc. Toute autre chose ne me paraît être qu'un jeu d'esprit qui, malheureusement, pour intéressant qu'il soit, nous prend un temps et des forces que nous pourrions peut-être mieux employer ; or, Franklin l'a dit avec raison : « Ne gaspillez pas le temps, car c'est l'étoffe dont la vie est faite. »

Et plus tard, (*J. M. S.*, 1894, p. 259), à propos de l'analyse que je faisais d'un ouvrage de M. Drach, revenant sur cette thèse du temps mal dépensé, je disais encore : « Je vois à regret un jeune et bon esprit se lancer dans le courant philosophique qui pousse, loin des recherches vives, dans des sphères singulièrement nuageuses et, je crois, improductives, des efforts qui pourraient trouver un meilleur emploi. Ce mouvement d'entraînement qui a pour conséquence de détacher les forces de leurs véritables points d'application est encore peu sensible. Je crains qu'il ne se généralise et, tout en reconnaissant les fruits excellents que l'esprit philosophique a autrefois produits, sans mettre en doute l'action qu'il exerce encore aujourd'hui sur nos recherches, je crois que, poussé trop loin, il ne saurait contribuer d'une façon sensible au but véritable, celui que les jeunes mathématiciens ne doivent jamais perdre de vue, le progrès des mathématiques. »

La brochure du général Frolov a réveillé chez moi ces idées, autrefois

exprimées. J'ai pensé qu'il serait utile de les reproduire ici, pour les soumettre à la réflexion des jeunes gens trop enclins à se diriger vers ces points brillants, d'une exploitation relativement facile, mais qui prennent leur temps et leurs forces, hélas ! sans profit pour la science. G. L.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

---

415. — *Soient* M *et* M′ *les centres des cercles tangents aux trois cercles décrits des sommets d'un triangle comme centres et tangents entre eux extérieurement, deux à deux; M. E. Lemoine a trouvé pour les coordonnées barycentriques de ces points :*

$$\frac{\alpha}{r' \mp a} = \frac{\beta}{r'' \mp b} = \frac{\gamma}{r''' \mp c}.$$

Si on prend pour triangle de référence le triangle podaire de I, du triangle primitif, les coordonnées normales de ces deux points deviennent :

$$x(2 \sin A \pm 2\cos A) = y(2 \sin B \pm 2\cos B) = z(2 \sin C \pm 2\cos C).$$

Ces formules montrent que les inverses M_2, M'_2 de ces points appartiennent à l'hyperbole de Kiepert du triangle podaire de I et correspondent à l'angle de Kiepert, $\cot\lambda = \pm 2$; ce qui fournit une construction très simple de ces points, et montre, en outre, qu'ils sont conjugués harmoniques par rapport à IΓ.

416. — *Dans un triangle,* θ *étant l'angle de Brocard, on a :*

$$\Sigma a^2 = 4S \cot g\, \theta$$
$$\Sigma a^2 b^2 = 4S^2(1 + \cot g^2\, \theta).$$

Ces deux formules, bien connues, ne sont indiquées que pour mémoire.

$$\Sigma a^4 = 8S^2(\cot g^2\, \theta - 1)$$
$$\Sigma a^6 = 16S^3 \cot g\, \theta\, (\cot g^2\, \theta - 3) + 48R^2S^2$$
$$\Sigma a^4 b^2 = 16S^3 \cot g\, \theta\, (\cot g^2\, \theta + 1) - 48R^2S^2$$
$$\Sigma a^6 b^2 = 32S^4\, (\cot g^4\, \theta - 1) - 64R^2S^3 \cot g\, \theta$$
$$\Sigma a^4 b^4 = 16S^4\, (\cot g^2\, \theta + 1)^2 - 128R^2S^3 \cot g\, \theta$$
$$\Sigma a^8 = 32S^4\, (\cot g^4\, \theta - 6 \cot g^2\, \theta + 1) + 256R^2S^3 \cot g\, \theta$$
$$\Sigma a^{10} = 64S^5 \cot g\, \theta\, (\cot g^4\, \theta - 10 \cot g^2\, \theta + 5) + 320R^2S^4\, (3 \cot g^2\, \theta - 1)$$
$$\Sigma a^8 b^2 = 64S^5 \cot g\, \theta\, (\cot g^4\, \theta - 2 \cot g^2\, \theta - 3) + 64\, R^2S^4\, (\cot g^2\, \theta + 5)$$
$$\Sigma a^6 b^4 = 64S^5 \cot g\, \theta\, (\cot g^2\, \theta + 1)^2 - 64R^2S^4\, (9 \cot g^2\, \theta + 1).$$

BACCALAURÉATS

(OCTOBRE 1895)

Académie de Lyon.

BACCALAURÉAT COMPLET

I. Démontrer que deux quadrilatères sont équivalents lorsque leurs diagonales ont des longueurs égales et que les angles qu'elles forment entre elles sont égaux.

II. *Problème.* — Calculer la surface d'un quadrilatère dans lequel : 1° les diagonales ont pour longueurs :

$$AC = 6^m,71 ; \qquad BD = 5^m,42 ;$$

2° l'angle en I le plus petit des deux :

$$I = 79°, 30', 15''.$$

On calculera la surface en centimètres carrés et l'on donnera sa valeur en ares et fractions de l'are.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

I. *Questions au choix :* 1° Tout déplacement d'une figure plane de forme invariable dans un plan se ramène à une rotation ou à une translation.

2° Inscription dans un cercle d'un décagone régulier.

3° Mesure de la surface du rectangle.

II. *Problème.* — Deux forces P et Q appliquées à un corps solide font entre elles un angle α. Trouver leur résultante R et les angles que fait sa direction avec celle des deux forces données.

Application. — $P = 12$ kil. 235 : $Q = 2,649$, $\alpha = 75°31'5''$.

Académie de Montpellier.

Résoudre l'équation

$$\sqrt{2x+3} + \sqrt{5-8x} = \sqrt{4x+7}.$$

Déterminer les angles x, y qui vérifient les relations

$$\operatorname{tg} x = a \operatorname{cotg} y, \qquad \operatorname{tg} 2x = b \operatorname{cotg} y.$$

Discussion.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE

1° Un triangle rectangle ABC tourne autour de l'hypoténuse BC.

Déterminer une droite EF de longueur donnée, dont les extrémités E et F sont situées sur les côtés AB et AC du triangle et telle que cette droite EF engendre une surface équivalente à celle d'un cercle donné. — Discuter le problème.

2° Résoudre $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a$, $\cos x + \cos y = b$ (*).

(*) C'est la seconde fois (V. *Journal*, 1895, p. 86) que cette question est posée aux examens de Montpellier. Cette question comporte donc une solution simple, que j'ai déjà réclamée de l'obligeance d'un correspondant, n'ayant pu la trouver moi-même. Je renouvelle ici cette prière. (*G. L.*)

QUESTION 659

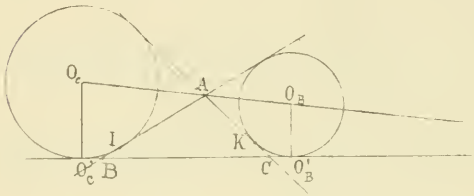
Solution par M. Goyens.

Dans un triangle ABC, *on considère les centres* O_B *et* O_C *des cercles ex-inscrits dans les angles* B *et* C *et on projette ces centres en* O'_B *et* O'_C *sur le côté* BC. *La droite* $O_C O_B$ *rencontre* BC *en* A'. *Montrer que :*

1° Les points A *et* A' *sont conjugués harmoniques de* O_C *et* O_B.

2° L'ellipse ayant pour sommets du grand axe les points O'_C O'_B *et passant par* A *jouit de la propriété d'être tangente à la droite* $O_C O_B$ *et d'avoir pour foyers les points* B *et* C.

1° Les points A et A' sont les centres de similitude des deux circonférences O_C et O_B, donc ils sont conjugués harmoniques des centres O_C et O_B.



2° Soient I le point de contact du cercle O_C avec AB, et K le point de contact du cercle O_B avec AC. On a

$$AI = p - b, \quad AK = p - c, \quad AI + AK = a,$$

$$AB + AC = AI + BI + AK + KC = a + O'_C B + O'_B C = O'_C O'_B.$$

Le point A est donc un point de l'ellipse dont B et C sont les foyers et $O'_C O'_B$ le grand axe.

$O_C O_B$ est la tangente en A à cette ellipse, puisque c'est la bissectrice de l'angle extérieur des rayons vecteurs AB et AC.

Nota. — Solutions analogues par MM. L'Huillier, Droz-Farny, E. Foucart et un anonyme.

QUESTION 660

Solution par M. A. Droz-Farny.

Soient O *le centre d'inversion,* A *et* B *deux points d'une figure,* A' *et* B' *les points correspondants de la figure inverse. Démontrer*

que la médiane et la symédiane du triangle AOB *issues de* O, *sont respectivement symédiane et médiane du triangle* A'OB'.

(A. Cazamian.)

Le théorème devient presque évident en choisissant pour module d'inversion le produit OA.OB. Le triangle OA'B' coïncide avec le triangle OAB retourné.

Or, par retournement du triangle, la médiane fournit son isogonale, c'est-à-dire la symédiane et *vice versa*.

QUESTION 662

Solution par M. E. Lemoine

Dans un triangle ABC *on prolonge* AB *de* BD *égal à* $\frac{b^2}{c}$ *et* AC *de* CE *égal à* $\frac{c^2}{b}$. *Montrer que les quatre points* B, C, D, E *sont sur une même circonférence et que les tangentes en* B *et* C *à cette circonférence passent, l'une par un des points de Brocard, l'autre par l'autre.*

Nota. — *L'angle* CDB *est égal à l'angle de Brocard. On peut construire ainsi cet angle avec une simplicité géométrographique égale à* 14. (Bernès.)

Les quatre points B, C, D, E sont concycliques puisque

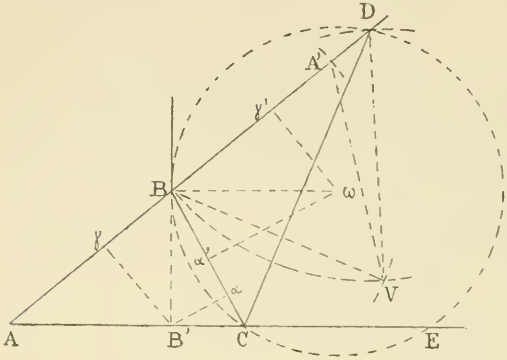
$$AB.AD = AC.AE = c^2 + b^2.$$

Soit ω le centre de la circonférence BCDE qui se projette en γ' sur AB en α' sur BC. Soit B' le point où la tangente en B à la circonférence BCDE coupe AC; B' se projette en α sur BC en γ sur AB.

Les deux quadrilatères $B\gamma'\omega\alpha'$ et $B'\gamma B\alpha$ sont semblables; on a donc

$$\frac{B'\alpha}{B'\gamma} = \frac{B\alpha'}{B\gamma'} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{b^2}{2c}} = \frac{\frac{c}{b}}{\frac{b}{a}},$$

Ce qui prouve que BB′ passe par le point rétrograde de Brocard dont les distances aux trois côtés sont proportionnelles à $\frac{c}{b}, \frac{a}{c}, \frac{b}{a}$. On démontrerait de même que la tangente en C passe par le point direct de Brocard.



Puisque B′B passe par le point rétrograde de Brocard, en appelant ω l'angle de Brocard, on a

$$B'BC = B\omega\alpha' = BDC = \omega.$$

Pour construire, par cette méthode, l'angle de Brocard le plus simplement possible, je vais placer D le plus simplement possible et je tracerai CD.

Je suppose qu'il n'y a sur la figure que les trois côtés du triangle ABC qui soient tracés.

Je place A′ symétrique de A par rapport à B	op : $(2C_1 + C_3)$
Je trace A′(BA) (*)	op : $(C_1 + C_3)$
Je trace B(AC) qui coupe A′(BA) en V	op : $(3C_1 + C_3)$
Je trace V(AC) qui coupe AB en D et en B	op : $(C_1 + C_3)$
Je trace DC	op : $(2R_1 + R_3)$

BDC est l'angle de Brocard cherché, obtenu par le symbole

$$\text{op} : (2R_1 + R_2 + 7C_1 + 4C_3)$$

Simplicité : 14; Exactitude : 9; 1 droite, 4 cercles.

Pour montrer que $BD = \frac{b^2}{c}$, on remarquerait que les deux triangles isocèles semblables VBD, A′BV qui ont l'angle VBD à la base, commun donnent

$$\frac{BV}{BA'} = \frac{BD}{BV} \quad \text{d'où} \quad BD = \frac{b^2}{c}.$$

(*) Je rappelle que M(PQ) désigne le cercle de centre M et de rayon PQ.

Remarques. — DE passe par le symétrique de A par rapport au milieu de BC.

Pour faire cette construction il faut que 2BA′ soit supérieure à BV. On a donc $2c > b$ et l'on peut toujours choisir les côtés b et c de façon qu'elle soit remplie.

Les trois circonférences BCDE et les deux autres analogues ont pour centre radical l'inverse du milieu de la ligne qui joint les points de Brocard.

Cette construction géométrographique de l'angle de Brocard est très intéressante, car elle réduit notablement le symbole de la construction la plus simple qui était connue pour obtenir cet angle et qui était, pour moi, la suivante :

Je trace C(CB) qui coupe CA en β dans le sens CA, puis A(CB) qui coupe AB en α dans le sens AB et CA en μ dans le sens CA, op : $(3C_1 + 2C_3)$; je trace $\alpha(B\beta)$ qui coupe A(CB) en π du même côté de AB que C, op : $(3C_1 + C_3)$; puis $\mu(B\beta)$ qui coupe A(CB) en C′, point symétrique de C par rapport au milieu de AB, op : $(C_1 + C_3)$. Je trace $A\pi$ qui coupe CB en J, puis C′J op : $(4R_1 + 2R_2)$; il est facile de démontrer que C′JB est l'angle de Brocard obtenu par le symbole : op : $(4R_1 + 2R_2 + 7C_1 + 4C_3)$.

Simplicité : 17; exactitude : 11; 2 droites, 4 cercles.

Nota. — Solution de la première partie par MM. L'Huillier et E. Foucart.

RAPPEL DE QUESTIONS NON RÉSOLUES

149. *(1884.)* — **On donne deux droites fixes et un point O. Un angle AOB, de grandeur constante, tourne autour du point O. A et B étant les points où ses côtés rencontrent respectivement les deux droites fixes, on mène OA′ perpendiculaire à OA, et rencontrant en A′ l'une des droites ; OB′, perpendiculaire à OB, et qui rencontre l'autre droite en B′ ; enfin on projette le point O sur les trois droites AB, AA′, BB′, en α, β, γ. Démontrer que le cercle circonscrit au triangle $\alpha\beta\gamma$ passe par un point fixe, et touche un cercle fixe.** *(Weil.)*

199. *(1885.)* — On donne deux droites rectangulaires Ox, Oy et deux droites Δ, Δ' parallèles à Ox. Par O, on mène une transversale mobile Δ'' qui rencontre Δ en A', Δ' en A'; enfin au point A, on élève une perpendiculaire A'I égale à A'A.

Cela posé, on demande de déterminer la droite Δ'' de façon que le rectangle λ, obtenu en abaissant, de I, des perpendiculaires sur Ox et Oy soit maximum.

On suppose ensuite que les droites Δ, Δ' se meuvent parallèlement à elles-mêmes, en conservant une distance invariable; à chaque position de ces droites correspond un point I, déterminé comme on vient de le voir. Trouver pour quelle position des parallèles le rectangle λ, correspondant à ce point, est minimum. *(G. L.)*

240. *(1887.)* — La résultante de trois forces MA, MB, MC représentées par les distances d'un point quelconque M du plan d'un triangle aux trois sommets, est représentée par la droite qui joint M à son anticomplémentaire. *(J. Neuberg.)*

241. *(1887.)* — Soient M et M' deux points inverses par rapport au triangle ABC. La résultante de trois forces représentées par les perpendiculaires abaissées de M' sur les côtés de ABC est perpendiculaire à la droite qui est harmoniquement associée à M. *(J. Neuberg.)*

284. *(1888.)* — Sur les trois côtés d'un triangle équilatéral, on construit des triangles isoscèles. Étant donnés le périmètre et la surface de l'hexagone ainsi formé, calculer le côté du triangle équilatéral, et montrer que les deux solutions ainsi obtenues n'en constituent au fond qu'une seule.

(G. Darboux.)

359. *(1890.)* — Si les droites AE, CF menées des extrémités d'une diagonale AC du quadrilatère

ABCD, parallèlement à deux côtés opposés, coupent les deux autres côtés aux points E, F, la droite EF est parallèle à l'autre diagonale BD.

Déduire de cette propriété, que si M, N, divisent AB, CD dans un même rapport, la somme des aires ANB, CMD est égale à l'aire ABCD. (J. Neuberg, *Mathesis*, 1882, p. 158, et 1883, p. 140). *(B. Sollertinsky.)*

360. *(1890.)* Si les droites OA, OA′ sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle XOY, et si B, C, B′, C′ sont les projections de A, A′ sur OX, OY : 1° les triangles ABC, A′B′C′ sont en perspective; 2° les perpendiculaires abaissées des points de concours des côtés homologues, sur les droites joignant les sommets opposés concourent en un même point. *(B. Sollertinsky.)*

391. *(1891.)* Résoudre les équations

$$(y - z + b^2 - c^2)^2 = 4a^2x,$$
$$(z - x + c^2 - a^2)^2 = 4b^2y,$$
$$(x - y + a^2 - b^2)^2 = 4c^2z. \qquad (G.\ L.)$$

418. *(1891.)* On considère la circonférence qui passe par le sommet A et par le point de Lemoine d'un triangle ABC, et qui coupe orthogonalement le cercle circonscrit. Démontrer qu'on a, pour tout point M de cette ligne :

$$\frac{a^2\overline{MA}^2}{b^2\overline{MB}^2 - c^2.\overline{MC}^2} = \frac{m_a^2}{m_b^2 - m_c^2}$$

(a, b, c désignant les côtés du triangle; m_a, m_b, m_c les médianes.) *(L. Benezech.)*

420. *(1891.)* Soient a, b, c les longueurs des trois côtés BC, CA, AB, d'un triangle et α, β, γ les angles que forment ces côtés avec une direction fixe quelconque, dans le plan, ces angles étant comptés de 0 à 2π. Démontrer qu'on a

$$a^3 \cos 3\alpha + b^3 \cos 3\beta + c^3 \cos 3\gamma = 3abc \cos(\alpha + \beta + \gamma),$$
$$a^3 \sin 3\alpha + b^3 \sin 3\beta + c^3 \sin 3\gamma = 3abc \sin(\alpha + \beta + \gamma).$$

(Laisant.)

QUESTIONS PROPOSÉES

701. — Résoudre et discuter l'équation

$$\sin^{10} x + \cos^{10} x = a.$$

(E.-N. Barisien.)

702. — 1° Le carré de la distance du point de rencontre des hauteurs d'un triangle au centre du cercle circonscrit à ce triangle, augmenté de la somme des carrés des côtés est égal à neuf fois le carré du rayon du cercle circonscrit.

2° La somme des carrés des distances du centre de gravité d'un triangle aux centres du cercle circonscrit et du cercle inscrit à ce triangle, est égale à la somme des carrés des rayons de ces deux cercles, diminuée du $\frac{1}{12}$ du carré du périmètre du triangle.

3° Si on considère le centre du cercle circonscrit, le centre du cercle inscrit et le point de rencontre des hauteurs d'un même triangle, l'aire S du triangle formé par ces trois points est donnée par l'expression

$$4S^2 = (R^2 - 2Rr)[9R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)] - \left[\frac{ab + ac + bc}{2} - 3R(R + r)\right]^2,$$

a, b, c désignant les trois côtés du triangle, r et R, les rayons des cercles inscrit et circonscrit. *(E.-N. Barisien.)*

ERRATUM

P. 12, 5° ligne, *au lieu de* « équation réduite au » *il faut* « équation réduite du ».

RECTIFICATIONS

Page 13, ligne 11, *au lieu de :* le produit, *lire* : le demi-produit.

Page 21, ligne 3 de la solution 689, *au lieu de :* Dd, *lire :* $\frac{1}{2}$ Dd.

Avant-dernière ligne de la même solution ; *au lieu de :* au double de l'inverse, *lire :* à l'inverse.

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 840-1-96.

SUR L'OMBRE PROPRE DES POLYÈDRES (*)

Par M. **M. d'Ocagne.**

1. Projections éclairées et projections sombres. — Pour savoir si une face vue d'un polyèdre est dans la lumière ou dans l'ombre, il suffit de se rendre compte de cette circonstance pour le triangle formé par trois quelconques des sommets de cette face. Toute la question de l'ombre dans les polyèdres se réduit donc à étudier l'ombre d'un triangle.

Le triangle étant supposé découpé dans un plan opaque, l'une de ses faces est éclairée, l'autre sombre. Suivant que c'est l'une ou l'autre qui est vue pour un œil situé à l'infini dans la direction des projetantes, la projection correspondante est dite éclairée ou sombre.

2. Remarque préliminaire. — Parmi les trois sommets du triangle ABC, il en est un, A ou $(a.a')$, dont le plan de profil coupe ce triangle suivant la droite AM, le point M étant défini par ses projections m et m', intersections de

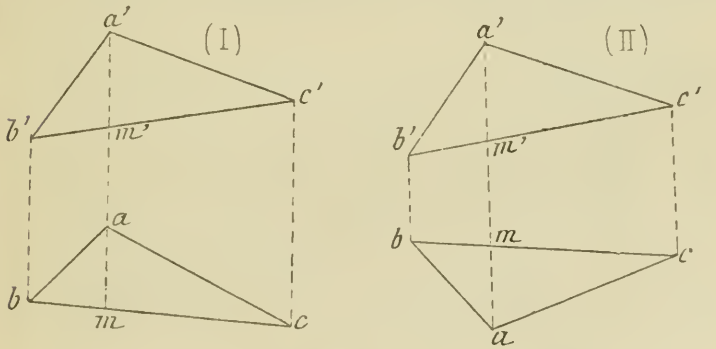


Fig. 1.

bc et de $b'c'$ avec la ligne de rappel aa' [*fig. 1*, (I) et (II)].

Figurons-nous la droite AM dans ce plan de profil xOy

(*) Cette note est extraite du Cours de Géométrie descriptive professé par M. d'Ocagne, à l'École des Ponts et Chaussées (Année préparatoire), cours qui est en voie de publication dans l'*Encyclopédie des Travaux publics*.

[*fig.* 2, (I) et (II)], en désignant par les numéros 1 et 2 les deux faces du triangle.

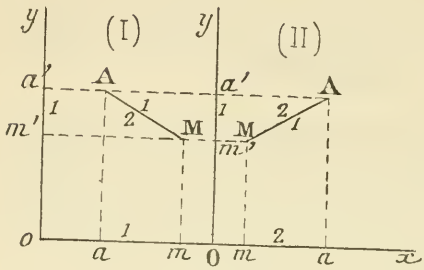


Fig. 2.

On voit que dans le cas (I), c'est-à-dire lorsque les segments *am* et *a'm'* sont de même sens, c'est la même face 1 qui est en vue sur les deux projections, tandis que dans le cas (II), c'est-à-dire lorsque les segments *am* et *a'm'* sont de sens contraires, ce sont des faces différentes qui sont vues sur les deux projections. De là cette règle :

Suivant que les segments am *et* a'm' *sont ou non de même sens, les projections* abc *et* a'b'c' *sont ou non de même éclairement.*

Grâce à cette règle, on peut se borner à étudier l'éclairement sur l'un des plans de projection. Nous choisirons ici le plan vertical; mais *tout ce qui va être dit à propos de ce plan pourrait être étendu symétriquement au plan horizontal.*

3. Éclairement en projection verticale. — Parmi les trois sommets a', b', c', de la projection verticale, il en est un seul, a' par exemple, tel que la projection verticale du rayon lumineux, menée par ce point, passe à l'intérieur de $a'b'c'$ [*fig.* 3, (I), (II), (III), (IV)]. Soit $(\mu.\mu')$ le point où le plan projetant verticalement le rayon lumineux coupe $(bc.\ b'c')$, et appelons ρ la projection horizontale du point du rayon lumineux dont la projection verticale est μ'. La disposition respective des points μ et ρ permet, dans tous les cas, de décider de l'éclairement de la projection $a'b'c'$.

Quatre cas sont à considérer, suivant que, dans la direction du rayon lumineux, le point a' précède ou suit le point μ', suivant aussi que, par rapport au plan vertical, le point ρ est en avant ou en arrière du point μ. Ces quatre cas correspondent aux figures (I), (II), (III), (IV). Analysons chacun de ces cas:

I. a′ *précède* μ′. — ρ *est en avant de* μ. — A partir du point (*a*.*a*′) où il perce le plan du triangle, le rayon lumineux (*a*ρ.*a*′μ′) vient en avant de ce plan. Les rayons parallèles frappent donc le plan du triangle d'arrière en avant. *La projection* a′b′c′ *est sombre.*

II. a′ *précède* μ′. — ρ *est en arrière de* μ. — A partir du point

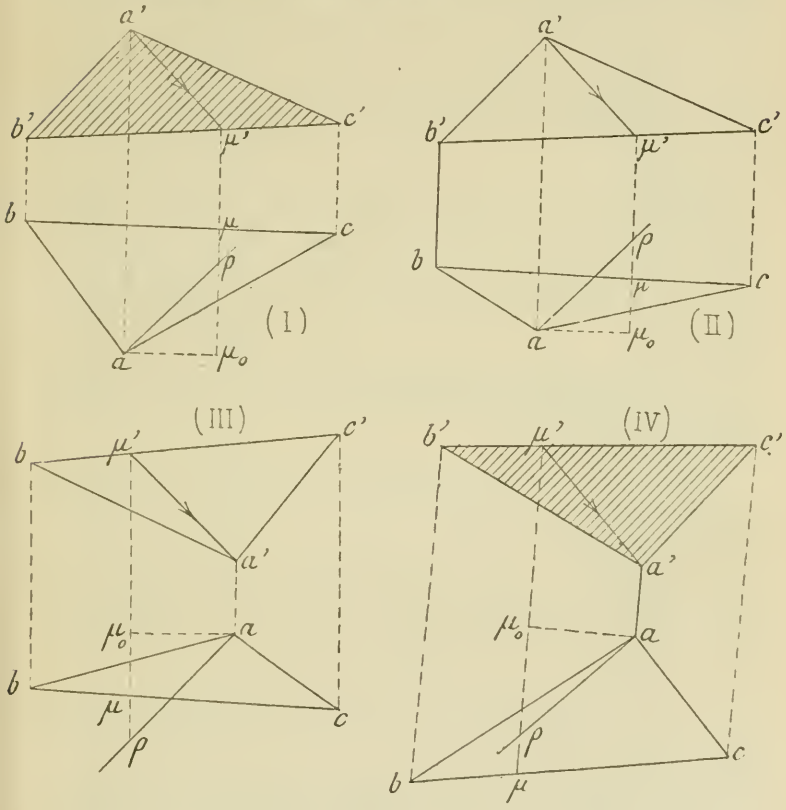


Fig. 3.

(*a*.*a*′) où il perce le plan du triangle, le rayon (*a*ρ.*a*′μ′) passe en arrière de ce plan. Les rayons parallèles frappent donc le plan du triangle d'avant en arrière. *La projection* a′b′c′ *est éclairée.*

III. μ' *précède* a'. — ρ *est en avant de* μ. — Avant d'atteindre le point $(a.a')$ où il perce le plan du triangle, le rayon $(a\rho.a'\mu')$ est en avant de ce plan. Les rayons parallèles frappent donc le triangle d'avant en arrière. *La projection* $a'b'c'$ *est éclairée.*

IV. μ' *précède* a'. — ρ *est en arrière de* μ. — Avant d'atteindre le point $(a.a')$ où il perce le plan du triangle, le rayon $(a\rho.a'\mu')$ est en arrière de ce plan. Les rayons parallèles frappent donc le triangle d'arrière en avant. *La projection* a'b'c' *est sombre.*

La discussion précédente est complète. Toutefois, on pourrait avoir quelque peine à s'en fixer les résultats dans la mémoire sans chercher à se représenter ce qui se passe dans l'espace.

Afin d'écarter cette difficulté, nous aurons recours à l'artifice suivant. Sur chacune des figures (I), (II), (III), (IV), abaissons du point a la perpendiculaire $a\mu_0$ sur $\rho\mu$. Nous faisons sur la situation respective des points μ, μ_0 et ρ les remarques suivantes :

I. Le point μ_0 est nécessairement en avant de ρ et comme ρ est, par hypothèse, en avant de μ, *le point* ρ *est nécessairement entre les points* μ *et* μ_0.

II. Le point μ_0 est nécessairement en avant de ρ, et comme ρ est, par hypothèse, en arrière de μ, *le point* ρ *est nécessairement en arrière à la fois de* μ *et de* μ_0.

III. Le point μ_0 est nécessairement en arrière de ρ, et comme ρ est, par hypothèse, en avant de μ, *le point* ρ *est nécessairement en avant à la fois de* μ *et de* μ_0.

IV. Le point μ_0 est nécessairement en arrière de ρ, et comme ρ est, par hypothèse, en arrière de μ, *le point* ρ *est nécessairement entre les points* μ *et* μ_0.

Rapprochant les conclusions de cette discussion de celles de la précédente, on voit que l'on peut énoncer la règle générale suivante :

Ayant mené par le point a' *la projection verticale du rayon lumineux* a'm' *qui coupe* b'c' *en* μ' *on tire la ligne de rappel de* μ' *qui coupe au point* μ *le côté* bc, *au point* ρ *la projection horizontale du rayon lumineux, menée par* a, *et au point* μ_0 *la*

perpendiculaire à la direction des lignes de rappel menée par a,

Suivant que le point ρ *est intérieur ou extérieur au segment* $\mu\mu_0$. *la projection* a'b'c' *est sombre ou éclairée* (*).

Si le point ρ vient en coïncidence avec le point μ, le rayon lumineux est dans le plan ABC. On doit alors considérer celui-ci comme éclairé. L'énoncé précédent peut donc être complété par le *nota bene* suivant :

Le point μ *lui-même doit être considéré comme extérieur au segment* $\mu\mu_0$.

Pour la projection horizontale, il n'y a dans l'énoncé précédent qu'à intervertir les termes « vertical » et « horizontal ».

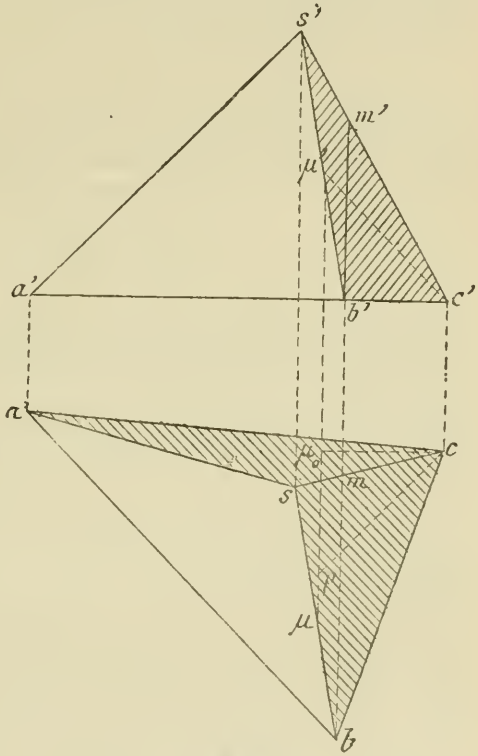


Fig. 4.

4. — Il n'y a lieu, d'ailleurs, d'appliquer la règle que si la disposition du dessin laisse quelque doute dans l'esprit. Ainsi, sur la *figure 4*, qui représente un tétraèdre SABC, il est évident qu'en projection verticale *s'a'b'* est

(*) Voici un moyen mnémonique bien simple pour retenir cette règle. Associant l'idée d'*obscurité* à celle de ce qui est *fermé* à la lumière du soleil, on n'a qu'à dire : *La projection est* SOMBRE *ou non suivant que le point* ρ *est* ENFERMÉ *ou non dans le segment* $\mu\mu_0$.

éclairée, en projection horizontale *sab* éclairée, *sac* sombre. Le doute ne saurait exister que pour la face (*sbc*. *s'b'c'*). Construisons pour cette face les points μ, μ_0 et ρ. Nous trouvons un point ρ entre μ et μ_0. Donc *s'b'c'* est sombre (n° 3). Et comme, d'ailleurs, les segments *bm* et *b'm'* sont de même sens, *sbc* est également sombre (n° 2).

ETUDE SUR L'INVOLUTION GÉNÉRALISÉE

Par M. **A. Noyer**, élève à l'École polytechnique, et M. **Ch. Michel**, élève à l'École normale supérieure.

(*Suite*, voir page 25.)

19. — Revenons au théorème de Frégier.

Considérons deux trièdres de l'involution dont les arêtes rencontrent la quadrique en A, B, C et en A', B', C'. Les deux coniques de la quadrique qui passent par A, B, C et par A', B', C' rencontrent respectivement en M et N, et en M' et N' les génératrices de la quadrique qui se coupent en O. Si nous prenons ce point O pour centre de projection et pour plan de projection un plan P quelconque, les projections de ces deux coniques sont deux autres coniques qui passent par les points fixes ω et ω', projections de M et N ou de M' et N', et par les projections α, β, γ et α', β', γ' des points A, B, C et A', B', C'. D'ailleurs, les triangles $\alpha\beta\gamma$ et $\alpha'\beta'\gamma'$ sont conjugués à la conique d'intersection du plan P et du cône de base de l'involution.

D'après le théorème de Frégier, l'intersection des deux plans ABC et A'B'C' rencontre la droite fixe, qui est conjuguée du plan tangent en O, par rapport à ce cône. Le point d'intersection de cette droite et du plan P appartient à la sécante commune aux deux coniques précédentes situées dans ce plan et ce point est le pôle de la droite fixe $\omega\omega'$ par rapport à la conique commune au cône et au plan P.

Si, en particulier, ω et ω' sont les points cycliques du plan P, c'est-à-dire si le point O est un ombilic de la quadrique et

si le plan P est parallèle au plan tangent en ce point, nous tombons précisément sur le théorème de Faure.

Ainsi, démontrer le théorème de Frégier revient à démontrer le théorème de Faure et réciproquement; par suite, à toute démonstration du théorème de Frégier correspond une démonstration de celui de Faure. Or, il est manifeste que les démonstrations que nous avons données du premier correspondent à celles que nous avons données du second.

Voici une troisième démonstration du théorème de Frégier qui s'appuie, comme la seconde, sur le théorème de Poncelet.

Reprenant les notations précédentes, considérons le cône qui a son sommet en O et qui s'appuie sur la conique de la quadrique qui passe par les points A, B, C et rencontre en M et N les génératrices de la quadrique au point O. Puisqu'il y a un trièdre O(ABC) inscrit dans le cône et conjugué par rapport au cône de base de l'involution, il en existe une infinité et en particulier un dont une des arêtes est la génératrice OM commune au cône et à la quadrique. Les deux autres arêtes qui rencontrent la quadrique en u et v se meuvent, lorsque le trièdre O(ABC) varie, dans un plan fixe qui est le conjugué de la droite OM par rapport au cône de base de l'involution.

En vertu du théorème de Frégier dans le plan, la droite uv passe par un point fixe I; il existe donc un point I commun à tous les plans tels que ABC, ce qui démontre le théorème de Frégier dans l'espace.

La démonstration correspondante du théorème de Faure est due à Laguerre.

Supposons que les points ω et ω' soient les points cycliques du plan P. La conique passant par les points α, β, γ et ω, ω' est circonscrite à un triangle conjugué à une conique fixe; il existe donc un triangle inscrit dans la première ayant son sommet en ω et conjugué à la dernière. Les deux autres sommets se meuvent, lorsque le triangle $\alpha\beta\gamma$ varie, sur une droite fixe qui est la polaire du point ω par rapport à la conique fixe et qui passe par le centre de cette conique. La puissance de ce point par rapport au cercle est constante. C'est le théorème de Faure.

PASSAGE DE L'INVOLUTION TERNAIRE A L'INVOLUTION QUATERNAIRE

20. — Considérons deux tétraèdres ABCD et A'B'C'D' conjugués à une quadrique de base. Les faces BCD et B'C'D' se rencontrent suivant une droite; ω étant un point de cette droite, prenons deux triangles $\omega\alpha\beta$ et $\omega\alpha'\beta'$ respectivement situés dans les plans BCD et B'C'D' et respectivement conjugués aux coniques d'intersection de ces plans avec la quadrique de base. Nous avons ainsi quatre trièdres ABCD, $A\alpha\beta\omega$, $A'\alpha'\beta'\omega$, A'B'C'D' qui se suivent de façon que deux tétraèdres consécutifs ont en commun un sommet et la face opposée.

Faisons correspondre d'une façon déterminée à chaque tétraèdre de l'involution une quantité ou une figure *dans laquelle les sommets et les faces jouent un même rôle.* Si les quantités ou les figures, correspondant aux tétraèdres qui ont un même sommet et la même face opposée, conservent la même valeur ou ont une même propriété avec une figure fixe, cette valeur ou cette propriété est commune aux deux quantités ou aux deux figures qui correspondent à deux tétraèdres consécutifs de la chaîne précédente, et par suite à celles qui correspondent aux deux trièdres O(ABC) et O(A'B'C'), qui sont deux trièdres quelconques de l'involution.

Tel est notre *second théorème fondamental.*

En voici quelques applications.

21. *Théorème de Faure.* — *Le tétraèdre* ABCD *variant en conservant un sommet* A *fixe,* le triangle BCD varie dans le plan polaire de A en restant conjugué à la conique d'intersection de la quadrique de base et de ce plan, conique qui a son centre en ω. La puissance du centre ω par rapport au cercle variable BCD et par suite à la sphère variable ABCD est constante, d'après le théorème de Faure dans le plan. Donc la puissance de tout point de la droite $A\omega$ par rapport à cette sphère est constante, et en particulier celle du centre de la quadrique. Les tétraèdres ABCD qui ont un même sommet A ont donc cette propriété que la puissance du centre de la quadrique par rapport à leurs sphères circonscrites est la même;

cette puissance est donc la même pour tous les tétraèdres de l'involution.

22. *Théorème.* — La puissance du centre O de la quadrique par rapport à la sphère qui passe par les pieds α, β, γ, δ, des perpendiculaires abaissées de ce point sur les faces d'un tétraèdre ABCD est constante quand ce tétraèdre varie en restant conjugué par rapport à la quadrique.

Quand ce tétraèdre varie en conservant un sommet A *fixe*, le groupe des trois droites $O\beta$, $O\gamma$, $O\delta$ varie en involution, et comme β, γ, δ se déplacent sur la sphère décrite sur OA comme diamètre, le plan $\beta\gamma\delta$ passe par un point fixe ω. La puissance du point ω par rapport à la sphère $\alpha\beta\gamma\delta$ est constante, et, par suite, il en est de même de tout point de la droite $\alpha\omega$. Le théorème est établi s'il est démontré que la droite $\alpha\omega$ passe par O.

Or, parmi les tétraèdres de l'involution qui ont un sommet en A, considérons la simple infinité de ceux dont la face ACD est parallèle au plan polaire de A, dont le sommet B se trouve, par conséquent, sur la droite AO et pour lesquels le couple des faces ABD, ABC passe par le point O. Dans toutes ces positions du tétraèdre variable, les points γ et δ coïncident avec le point O, tandis que le point β vient sur la droite $O\alpha$. En conséquence, les plans $\beta\gamma\delta$, en simple infinité, qui correspondent à ces positions du tétraèdre, passent par la droite αO; le point ω commun à tous ces plans appartient donc à cette droite.

23. *Théorème de Hesse.* — La conique qui passe par cinq des sommets de deux triangles conjugués à une même conique passe par le sixième. C'est un théorème sur l'involution ternaire. Le théorème de Hesse, qui lui correspond dans l'involution quaternaire, s'énonce ainsi :

Une quadrique variable qui passe par sept des sommets A, B, C, D et A′, B′, C′ de deux tétraèdres conjugués à une même quadrique de base passe par le huitième sommet D′.

Pour le démontrer, nous allons encore nous servir des

quatre tétraèdres qui nous ont permis d'établir le second théorème fondamental.

Comme il existe un triangle BCD respectivement inscrit et conjugué aux coniques de la quadrique variable et de la quadrique de base situées dans son plan, il en existe un autre, $\omega\alpha\beta$, dont le sommet ω est sur la droite d'intersection des plans BCD et B'C'D'. Puisqu'il existe un triangle $A\alpha\beta$ inscrit et conjugué aux coniques des deux quadriques situées dans son plan, il y en a un autre dont le sommet est en A', point situé dans le plan $A\alpha\beta$. Les deux autres sommets de ce triangle, α' et β', sont dans le plan B'C'D'; il existe donc un triangle $\omega\alpha'\beta'$ inscrit et conjugué aux deux coniques situées dans le plan B'C'D'. Par suite, le triangle B'C'D' conjugué à celle de ces coniques qui est sur la quadrique de base et dont deux sommets B' et C' sont sur l'autre conique qui appartient à la quadrique variable, a son sommet D' sur cette dernière conique, c'est-à-dire sur la quadrique variable.

24. *Remarque.* — A l'aide du théorème de Hesse, nous pouvons démontrer le théorème de Faure dans l'espace, de deux nouvelles manières qui correspondent aux démonstrations que nous avons données du théorème de Faure, dans le plan, à l'aide du théorème de Poncelet.

25. — En combinant les deux théorèmes fondamentaux, on voit que deux tétraèdres quelconques d'une involution quaternaire sont les extrémités d'une chaîne de tétraèdres de l'involution, dans laquelle deux tétraèdres consécutifs ont deux sommets communs. On en déduit un théorème qui permet d'effectuer immédiatement le passage de l'involution binaire à l'involution quaternaire.

Le théorème de Faure, dans l'espace, peut se démontrer de cette manière.

(A suivre.)

SUR LA DÉTERMINATION GÉOMÉTRIQUE DE L'ANGLE x DONNÉ PAR L'ÉQUATION $a \sin x + b \cos x = c$, OÙ a, b, c SONT DES LONGUEURS DONNÉES (*)

Par **Emile Lemoine.**

Dans le numéro de janvier du journal, M. de Longchamps fait appel à un ami de la géométrographie au sujet de cette question (pp. 5 et 13); j'ai quelques raisons de me considérer parmi ceux-ci et j'y réponds d'autant plus volontiers que cela me fournira l'occasion d'analyser aussi une construction que j'avais trouvée, pour cet angle, lorsque j'étais encore élève de mathématiques spéciales et qui, je crois, est nouvelle.

J'approuve complètement la proposition de M. de Longchamps de distinguer par des noms différents les deux sortes de simplicités que l'on rencontre en géométrie et j'appellerai comme lui, à l'avenir, *simplicité théorique* la simplicité telle que l'ont entendue jusqu'ici les géomètres et qui se rapporte à l'*énoncé* de la possibilité de la construction et *simplicité graphique* celle qui, découlant de la géométrographie, se rapporte à l'exécution matérielle de l'épure avec les instruments usités, c'est-à-dire, soit règle et compas seuls, soit en employant aussi l'équerre avec eux.

Je ne suis cependant pas tout à fait de l'avis de M. de Longchamps lorsqu'il semble croire que ces simplicités *doivent* être d'ordre différent, *par essence*; je pense comme M. Bernès, lequel, après discussion sur le sujet, m'a ramené à son opinion, c'est-à-dire qu'*en général* (je ne dis pas toujours), si la géométrographie (**) conduit à une construction plus simple

(*) Nous publierons dans le prochain numéro une autre discussion géométrographique du même problème, par M. Bernès. Il importe que l'attention des professeurs soit appelée sur la simplicité géométrographique; or, l'équation en question nous a paru particulièrement appropriée à ce but, puisqu'elle correspond à tous les problèmes quadratiques. *G. L.*

(**) La géométrographie ne doit pas se borner à compter *servilement* les opérations qui conduisent à un résultat, mais elle doit aussi chercher à obtenir ce résultat le plus simplement possible en remplaçant, s'il y a lieu, les constructions indiquées par l'énoncé géométrique, au moyen de constructions équivalentes se traçant plus simplement. Le résultat est souvent une construction qui s'énonce tout autrement que celle d'où elle dérive.

à effectuer que celle qui était connue, il y a à rechercher une exposition plus simple que l'exposition primitivement admise, exposition nouvelle qui conduirait directement à la construction géométrographique. M. Bernès me l'a montré par beaucoup d'exemples, mais je n'insiste pas, disant seulement que la géométrographie mène souvent par cette voie à des résultats spéculatifs nouveaux.

Je vais comparer trois constructions de l'angle x : celle de M. Droz-Farny (*J. E.*, 1895, p. 217), celle de M. Lauvernay (*J. E.*, 1896, p. 5) et la mienne.

Admettant les deux autres, je vais exposer d'abord cette dernière brièvement.

Si en coordonnées polaires, ox étant l'axe, o l'origine, je considère les deux cercles : $\rho = a \sin \omega + b \cos \omega$ et $\rho = c$, ils se couperont (quand l'équation aura une solution réelle) en deux points M et M′ et les angles Mox, M′ox répondront à la question.

Le cercle $\rho = a \sin \omega + b \cos \omega$ se trace facilement, il a pour centre le point μ dont les coordonnées rectangulaires sont $x = \frac{b}{2}$, $y = \frac{a}{2}$ et pour rayon $o\mu$; l'autre cercle est décrit de o comme centre, avec c pour rayon.

Construction de M. Droz-Farny (1895, p. 217).

Sur les deux côtés d'un angle droit C, *je porte les longueurs* CA = b, CB = a ; *sur le côté* AC (*dans la direction* AC), *je porte* AD = c *et je décris le cercle* D(a) *qui coupe l'hypoténuse* AB *aux points* E *et* F. *Appelons* L *et* M *les intersections de* DF, DE *avec* BC, *les angles* BLF, BME *répondent à la question.*

Je construis l'angle droit C de la façon suivante :

Je trace une droite DA op : (R_2).

Je trace deux cercles quelconques, mais se coupant et ayant leurs centres sur DA op : ($2C_2 + 2C_3$).

Je trace leur intersection BC qui coupe DA en C op : ($2R_1 + 2R_2$).

Je prends dans cet ordre : CA = b, AD = c, CB = a op : ($9C_1 + 3C_3$).

Je trace D (a) (ayant a dans le compas) op : ($C_1 + C_3$).
Je trace DE, DF op : ($4R_1 + 2R_2$).
Op : ($6R_1 + 4R_2 + 10C_1 + 2C_2 + 6C_3$).
Simplicité : 28 ; exactitude : 18 ; 4 droites, 6 cercles.

CONSTRUCTION DE M. LAUVERNAY (1896, p. 5).

Je construis le triangle BOA *rectangle en* O *et tel que* OA = a, OB = b. *Je circonscris un cercle à ce triangle; de* B *comme centre, avec* c *pour rayon, je trace un cercle qui coupe le cercle circonscrit en* D *et* D′; *les angles* OBD, OBD′ *sont les angles cherchés.*

Tracé des deux droites rectangulaires OA, OB ; je trace une droite quelconque OA, puis deux cercles quelconques se coupant et ayant leurs centres sur OA, puis l'intersection OB de ces deux cercles op : ($2R_1 + 2R_2 + 2C_2 + 2C_3$).
Je prends OA = a, OB = b op : ($6C_1 + 2C_3$).
Je trace BA op : ($2R_1 + 2R_2$),
puis la perpendiculaire au milieu M de BA
op : ($2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3$),
puis le cercle M(MO) qui est le cercle circonscrit à ABC
op : ($2C_1 + C_3$),
puis le cercle D (c) op : ($3C_1 + C_3$),
lequel, par son intersection avec M(MO) place D et D′;
enfin, je trace BD, BD′ op : ($4R_1 + 2R_2$).
Les angles cherchés OBD, OBD′ sont donc obtenus par :
op : ($10R_1 + 6R_2 + 13C_1 + 2C_2 + 8c_3$);
Simplicité : 39; exactitude : 25; 6 droites, 8 cercles.

CONSTRUCTION QUE J'AI PROPOSÉE PLUS HAUT

Tracer deux droites rectangulaires Ox, Oy, *placer le point* μ *dont les coordonnées sont* $x = \frac{b}{2}$, $y = \frac{a}{2}$, *tracer les cercles* μ(O) *et* O(c), *qui se coupent en* M *et* M′, *tracer* OM, OM′; *les angles* xOM, xOM′ *sont les angles cherchés.*

On voit, au premier coup d'œil, que cette construction, exécutée dans l'ordre où elle est énoncée, conduirait à un nombre d'opérations beaucoup plus élevé que les précédentes.

En effet : tracer deux droites rectangulaires, 8 opérations,

prendre des longueurs égales à la moitié de a et à la moitié de b, ce qui — ne se faisant pas sur les données elles-mêmes a et b, placées sur l'épure sans qu'on doive faire de constructions sur elles — exige, en faisant les opérations sur l'une des droites déjà tracées, 22 opérations. Cela fait, il faut placer le point μ, qui a pour coordonnées $\frac{b}{2}, \frac{a}{2}$ 14 opérations; décrire le cercle $\mu(O)$, 3 opérations; décrire le cercle $O(c)$, 4 opérations; enfin, tracer les deux droites OM, OM′, 6 opérations, en tout 57 opérations; mais, comme il ne s'agit que d'angles à déterminer, on voit qu'il suffit, pour éviter d'avoir à diviser a et b en deux parties égales, d'opérer sur une figure homothétique double, on aura seulement alors à doubler c pour tracer $O(2c)$, et, en dirigeant convenablement le reste de la construction, on peut réduire beaucoup le coefficient de simplicité comme il suit :

Je n'ai nullement besoin de l'axe Oy; je construis donc le triangle $O\lambda\mu$, rectangle en λ, et tel que $\lambda O = b$, $\lambda\mu = a$, sans même tracer $O\mu$.

Pour cela je trace $\lambda(b)$. op : $(2C_1 + C_3)$.

Je trace une droite quelconque $O\lambda$ passant par λ,

op : $(R_1 + R_2)$,

en appelant O le point où cette droite coupe le cercle.

J'élève en λ une perpendiculaire à $O\lambda$ en me servant du cercle $\lambda(b)$, op : $(2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3)$.

Je prends $\lambda\mu = a$ sur cette perpendiculaire,

op : $(3C_1 + C_3)$.

Le point μ est ainsi placé.

Je trace $\mu(\mu O)$, op : $(2C_1 + C_3)$.

Je prends dans le compas une longueur égale à $2c$,

op : $(4C_1 + C_2 + C_3)$.

Je trace $O(2c)$, op : $(C_1 + C_3)$.

$O(2c)$ et $\mu(\mu O)$ se coupent en M_1 et M_1'.

Je trace M_1O, $M_1'O$. op : $(4R_1 + 2R_2)$.

Les deux angles λOM_1, $\lambda OM_1'$ sont deux angles qui répondent au problème et sont obtenus par

$$Op : (7R_1 + 4R_2 + 14C_1 + C_2 + 7C_3).$$

Simplicité : 33; exactitude : 22; 4 droites, 7 cercles).

Je ne m'arrête pas à la discussion des conditions de possibilité du problème qui, par ma méthode, se fait également avec la plus grande facilité, ni à l'examen des cas où, dans l'équation donnée, a, b, c ont des signes différents. Cela change seulement les directions dans lesquelles il faut porter ces longueurs sur les droites, mais la solution est identique dans tous les cas.

Dans les constructions précédentes, je ne me suis servi que de la règle et du compas. Je vais les analyser maintenant en admettant l'usage de l'équerre pour mener des perpendiculaires; quoiqu'ils se trouvent inutilisés dans ces trois constructions, je rappelle que les symboles *particuliers* relatifs à l'équerre sont:

Mettre le bord de la règle ou de l'équerre en coïncidence avec deux points ou avec une droite tracée pour préparer le tracé d'une parallèle ou d'une perpendiculaire à une droite donnée op : $(2R'_1)$.

L'accent indique *seulement* qu'il s'agit d'une opération de préparation pour un tracé avec l'équerre, car op : $(2R'_1)$ est, au fond, identique à ce que nous appelons op : $(2R_1)$, lorsque nous employons la règle dans les tracés avec la règle et le compas seuls.

Faire glisser l'équerre jusqu'à ce qu'elle passe par un point marqué op : (E).

Construction de M. Droz-Farny.

Je trace deux perpendiculaires quelconques CA, CB (*)
op : $(2R_2)$.

Je prends $CA = b$, $DA = c$, $CB = a$; je décris $D(a)$; je trace BA, DE, DF, op: $(6R_1 + 4R_2 + 7C_1 + 3C_3)$.

Op: $(6R_1 + 6R_2 + 7C_1 + 3C_3)$.

Simplicité : 22 ; exactitude : 13 ; 6 droites, 3 cercles.

(*) Pour faire cette construction, je pose l'équerre *n'importe où* sur l'épure et je trace une ligne suivant un côté de l'angle droit, op : (R_2).

Je plaque la règle sur l'hypoténuse et je fais glisser *de n'importe quelle quantité* l'équerre sur la règle et je trace alors une droite en suivant l'autre côté de l'équerre, op : (R_2).

Construction de M. Lauvernay.

Je trace deux perpendiculaires OA, OB,

op : $(2R_2)$.

Je prends $OA = a$, $OB = b$; je trace AB,

op : $(2R_1 + R_2 + 6C_1 + 2C_3)$.

Je trace la perpendiculaire au milieu de AB,

op : $(2R_1 + R_2 + 2C_1 + 2C_3)$.

Je trace le cercle $B(c)$, puis les droites BD, BD′,

op : $(4R_1 + 2R_2 + 3C_1 + C_3)$.

Op : $(8R_1 + 6R_2 + 11C_1 + 5C_3)$.

Simplicité : 30 ; exactitude : 19 ; 6 droites, 5 cercles.

Construction de M. Lemoine.

Je trace deux droites perpendiculaires $\lambda\mu$, λO;

op : $(2R_2)$.

Je prends $\lambda O = b$, $\lambda\mu = a$ et je trace $\mu(O)$,

op : $(8C_1 + 3C_3)$.

Je prends dans le compas la longueur $2c$ et je trace $O(2c)$,

op : $(5C_1 + C_2 + 2C_3)$.

Je trace OM_1, OM_1'. op : $(4R_1 + 2R_2)$.

Op : $(4R_1 + 4R_2 + 13C_1 + C_2 + 5C_3)$.

Simplicité : 27 ; exactitude : 18 ; 4 droites, 5 cercles.

Je n'ai pas eu à employer le symbole E ni le symbole $2R_1$ puisque je ne me suis servi de l'équerre dans les trois cas que pour tracer deux perpendiculaires arbitraires.

Je m'aperçois que, à la suite de la construction de M. Lauvernay, M. de Longchamps a indiqué une autre construction dont la *simplicité théorique* est extrême; je vais aussi mesurer sa *simplicité graphique*.

1° Avec la règle et le compas seuls ;

Si λ est la longueur de l'unité, on voit qu'il suffit d'obtenir les points d'intersection de l'hypoténuse du triangle rectangle OPQ qui a pour côtés $OP = \frac{c}{a} . \lambda$, $OQ = \frac{c}{b} . \lambda$ avec le cercle $O(\lambda)$ et de joindre ces points à O pour avoir les angles cherchés. Choisissons l'unité de façon à simplifier la construction.

Si je prends $\lambda = a$, on aura : $OP = c$, $OQ = \frac{ca}{b}$ et le rayon du cercle sera a.

Je trace deux droites rectangulaires OP, OQ,

op : $(2R_1 + 2R_2 + 2C_2 + 2C_3)$.

Je prends $OP = c$, op : $(3C_1 + C_3)$.

Je construis la quatrième proportionnelle $\frac{ca}{b}$; en me servant des deux droites tracées et de OP, je peux l'obtenir par

op : $(2R_1 + R_2 + 10C_1 + 4C_3)$.

Comme le cercle $O(a)$ est tracé pour la construction de $\frac{ca}{b}$, je n'ai plus qu'à tracer PQ qui le coupe en M et en M', à tracer OM, OM', op : $(6R_1 + 3R_2)$.

Les angles cherchés sont MOP, MOQ obtenus par

op: $(10R_1 + 6R_2 + 13C_1 + 2C_2 + 7C_3)$.

Simplicité : 38; exactitude: 25; 6 droites, 7 cercles.

2° Avec la règle, le compas et l'équerre : je trace deux droites rectangulaires OP, OQ, op : $(2R_2)$.

Je prends $OP = c$, op : $(3C_1 + C_3)$.

Je construis la quatrième proportionnelle $\frac{ca}{b} = OQ$,

op : $(2R'_1 + R_2 + E + 6C_1 + 2C_3)$.

Le cercle $O(a)$ est tracé dans la construction de $\frac{ca}{b}$.

Je trace les trois droites PQ, OM, OM',

op : $(6R_1 + 3R_2)$.

PQ est tracé pour obtenir $OQ = \frac{ca}{b}$

op : $(6R_1 + 2R_1 + 6R_2 + 9C_1 + 3C_3 + E)$.

Simplicité : 27; exactitude : 18; 6 droites, 3 cercles.

On peut conclure, pour résumer cette discussion, que, *en employant la règle et le compas seuls*, les constructions ont l'ordre de *simplicité graphique* suivant, en commençant par la plus simple : la construction de M. Droz Farny, la construction de M. Lemoine, la construction de M. de Longchamps et la construction de M. Lauvernay.

Et que, *en employant la règle, le compas et l'équerre*, l'ordre

est : la construction de M. Droz-Farny, la construction de M. Lemoine et celle de M. de Longchamps qui sont équivalentes, la construction de M. Lauvernay. Celle de M. Droz-Farny est donc la meilleure dans les deux cas et celle de M. Lauvernay la plus compliquée.

EXERCICES DIVERS

Par **M. Aug. Boutin.**

417. — *On considère une conique* E *circonscrite à un triangle* ABC. *Soit* M *un point quelconque du plan du triangle,* AM, BM, CM *rencontrent* E *en* A_1, B_1, C_1; *la droite* MM_2 (M_2, *inverse de* M) *coupe les côtés de* ABC, *respectivement en* A′, B′, C′. *Démontrer que les droites :* $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$ *concourent en un même point* P *de la conique* E.

Cas particulier : E est le cercle circonscrit, M est l'orthocentre, alors P est le point de Steiner de ABC. (E. Lemoine. *Mathesis*, question 1038.)

418. — *On considère la conique circonscrite au triangle de référence et qui a pour centre le point de Lemoine* K; *soient* V_a, *l'angle de* KA *avec la tangente en* A *à cette courbe,* V_b, V_c, *des angles analogues. Démontrer la relation :*

$$a^2 \cot g\, V_a + b^2 \cot g\, V_b + c^2 \cot g\, V_c = 0.$$

419. — *Soit* V *l'angle des droites :*

$$(\Delta) \qquad \frac{X}{x} + \frac{Y}{y} + \frac{Z}{z} = 0,$$

$$(\Delta_1) \qquad \frac{X}{x_1} + \frac{Y}{y_1} + \frac{Z}{z_1} = 0.$$

Le lieu géométrique des points (x, y, z) *harmoniquement associés à* (Δ) *et tels que* V *soit constant, est une conique circonscrite au triangle de référence. Cette conique a pour équation :*

$$\sum \frac{y_1 z_1 \sin V - x_1 y_1 \sin (B + V) + x_1 z_1 \sin (C - V)}{x} = 0.$$

Cas particuliers :

1° $V = 0, \quad x_1 = y_1 = z_1.$

Le lieu des points harmoniquement associés aux parallèles à l'axe antiorthique est l'hyperbole circonscrite :

$$\sum \frac{b - c}{x} = 0.$$

(C'est la transformée par points inverses de ~~GI~~.) KI

2° $$V = 0, \quad \frac{x_1}{a} = \frac{y_1}{b} = \frac{z_1}{c}.$$

Le lieu des points harmoniquement associés aux parallèles à la droite de Lemoine est l'hyperbole circonscrite :

$$\sum \frac{a(b^2 - c^2)}{x} = 0.$$

(C'est la transformée par points inverses de KG.)

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Bernès :

« ... Le point M de la question 647 et le point A′ de 648 jouissent d'un grand nombre de propriétés indépendamment de celles qu'énonce M. Droz-Farny. Une des plus importantes à signaler est que ces deux points sont isogonaux. Le point M est en ligne droite avec le milieu de la médiane AD et le pied de la hauteur abaissée de A. Il satisfait à l'équipollence remarquable

$$\frac{1}{AM} \equiv \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}, \qquad (*)$$

d'où l'on peut tirer aisément un grand nombre de ses propriétés. — Pour A′, j'indique seulement qu'il est symétrique relativement au milieu de BC du point où la médiane coupe la circonférence ABC, qu'ainsi DA′ = DD′ (voir *J.* 1895, p. 283); enfin, que A′ est à l'intersection des deux cercles tangents à BC qui passent, l'un par A et C, l'autre par A et B... »

Extrait d'une lettre de M. d'Ocagne.

« ... L'énoncé de la question 660 m'avait échappé lorsqu'il avait paru.

Permettez-moi de vous faire observer que cette question constitue précisément le lemme (évident d'ailleurs) au moyen duquel j'ai obtenu une série de propriétés de la symédiane par la méthode d'inversion (*N. A. M.*, 1881, p. 365-367).

(*) Dans le triangle, rectangle en A, $\frac{1}{AH} \equiv \frac{1}{AB} + \frac{1}{AC}$.

QUESTION 7

Solution par M. Ernest Duporcq.

Sur les côtés d'un triangle donné ABC, *on construit trois triangles semblables* ABC_1, BCA_1, CAB_1, *tels que les droites* AA_1, BB_1, CC_1 *concourent en un même point* D. *Démontrer que les points* A_1, B_1, C_1, *décrivent chacun une circonférence.*

(J. Neuberg.)

Je commencerai par résoudre le problème suivant :

Étant donné un segment BC, *quel est le lieu des points* A *situés d'un même côté de ce segment, et tels que, dans le triangle* ABC,

$$\cot g A + \cot g B + \cot g C = K?$$

En désignant par a, b, c et h_a, h_b, h_c les longueurs des côtés et des hauteurs du triangle ABC, on a évidemment

$$\cot g\, B + \cot g\, C = \frac{a}{h_a}.$$

On doit donc avoir

$$\frac{a}{h_a} + \frac{b}{h_b} + \frac{c}{h_c} = \frac{K}{2}$$

ou

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2}{ah_a} = \frac{K}{2}.$$

En prenant pour axes BC et la perpendiculaire Oy au milieu de BC, on voit que

$$b^2 + c^2 = 2(x^2 + y^2) + \frac{a^2}{2}$$

et le lieu cherché est la circonférence

$$4(x^2 + y^2) - Kay + 3a^2 = 0.$$

On voit que les circonférences correspondant aux différentes valeurs de K ont pour axe radical commun la droite BC, la puissance du milieu O de BC ayant pour valeur $-\frac{3a^2}{4}$.

Soient maintenant A_1BC, B_1CA et C_1AB trois triangles semblables, et tels que les droites AA_1, BB_1 et CC_1 soient concourantes. Je suppose de plus que les points A′, B′ et C où AA_1, BB_1 et CC_1 coupent les côtés BC, CA et AB, sont

tous les trois extérieurs ou tous les trois intérieurs aux segments AA_1, BB_1 et CC_1, et je compte négativement dans le premier cas et positivement dans le second, les angles

$$\beta = \widehat{CBA_1} = \widehat{ACB_1} = \widehat{BAC_1},$$
$$\gamma = \widehat{BCA_1} = \widehat{CAB_1} = \widehat{ABC_1}.$$

En valeur absolue, on a

$$\frac{A'B}{A'C} = \frac{\text{aire } BAA_1}{\text{aire } CAA_1} = \frac{BA}{CA} \cdot \frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{\sin \widehat{ABA_1}}{\sin \widehat{ACA_1}},$$

et, grâce aux conventions de signes précédentes, on déduit de là que l'on a toujours, en grandeur et en signe

$$\frac{A'B}{A'C} = -\frac{c}{b} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\beta} \cdot \frac{\sin(B-\beta)}{\sin(C-\gamma)}.$$

En multipliant membre à membre les trois égalités analogues, et en tenant compte du théorème de Ménélaüs, on voit que

$$(1) \quad \frac{\sin(A-\beta)\sin(B-\beta)\sin(C-\beta)}{\sin^3\beta} = \frac{\sin(A-\gamma)\sin(B-\gamma)\sin(C-\gamma)}{\sin^3\gamma}.$$

Une première solution est

$$\beta = \gamma.$$

On obtient pour les lieux des points A′, B′ et C′ les perpendiculaires aux milieux des côtés du triangle ABC. (Les droites AA_1, BB_1 et CC_1 se coupent alors sur l'hyperbole équilatère circonscrite au triangle ABC et passant par son centre de gravité.)

Une deuxième solution est fournie par l'équation suivante, qui n'est qu'une transformation de (1)

$$\left.\begin{array}{r} \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C (\operatorname{cotg}^2\beta + \operatorname{cotg}\beta \operatorname{cotg}\gamma + \operatorname{cotg}^2\gamma) \\ - (\operatorname{tg} B \operatorname{tg} C + \operatorname{tg} C \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B)(\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma) \\ + \operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C \end{array}\right\} = 0,$$

qu'on peut écrire, en appelant α la valeur commune des angles A_1, B_1 et C_1

$$\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C.$$

Le lemme démontré plus haut permet de conclure que les points A_1, B_1 et C_1 décrivent trois circonférences passant respectivement par les points A, B et C. Le lecteur verra sans difficulté que les droites AA_1, BB_1 et CC_1 sont parallèles.

Remarque. — Le lemme préliminaire fournit comme cas particulier le théorème suivant, assez curieux :

Sur un segment fixe et d'un même côté de ce segment, on peut construire six triangles semblables à un triangle donné : les six sommets obtenus sont sur une circonférence. Toutes les circonférences ainsi obtenues ont même axe radical.

QUESTIONS PROPOSÉES

703. — Si dans un triangle ABC, on suppose $b = 2c$, la bissectrice extérieure de l'angle A est parallèle à la hauteur issue du sommet B. *(E.-N. Barisien.)*

704. — Les centres des circonférences passant par trois des quatre sommets d'un quadrilatère circonscriptible sont à leur tour les sommets d'un quadrilatère circonscriptible. *(Sollertinsky.)*

705. — A, B, P étant trois points donnés et D une droite fixe, on considère toutes les coniques Γ passant par les deux points A, B et pour lesquelles P est le pôle de D;

1° Les secondes cordes communes aux coniques Γ et à une conique Γ′, menée par les points A, B, passent par un point fixe M.

2° Lorsque la conique Γ′ varie, le point M engendre une ligne droite. *(Vve F. Prime.)*

706. — Par le sommet A d'un angle donné BAC, on mène une droite quelconque δ et l'on construit les paraboles P_1, P_2 tangentes, l'une, aux droites AB, δ, l'autre, aux droites AC, δ et qui admettent toutes deux un point donné F pour foyer. Si p_1, p_2 sont les points où ces paraboles touchent leur tangente commune δ, on demande de démontrer que l'angle $p_1 F p_2$ est constant. *(Vve F. Prime.)*

707. — Dans un triangle ABC on a deux points donnés P et Q, placer le point R dont les distances aux trois côtés de ABC soient proportionnelles au produit des distances de P et de Q à ces mêmes côtés.

On exclut évidemment la solution (longue et, surtout, peu élégante) qui consisterait à construire les moyennes proportionnelles l, m, n, entre les distances de P et Q aux trois côtés et à placer le point R dont les distances aux trois côtés seraient proportionnelles à l, m, n. *(E. Lemoine.)*

708. — On projette un point P d'une corde focale FCD d'une parabole sur les tangentes aux extrémités de cette corde.

Démontrer que la droite qui joint ces projections est une tangente à la parabole. *(Lucien Lévy.)*

709. — On donne un triangle rectangle AOB; on projette le sommet O sur l'hypoténuse AB, en C; puis, C sur OA, en O'. La parallèle menée par O', à AB, et la parallèle à OB, tracée par le milieu de OO', se coupent en un certain point R; OR rencontre AB en S.

Démontrer que la perpendiculaire élevée en R à OR et la parallèle à OA, menée par S, se coupent sur OB. *(G. L.)*

710. — On considère une circonférence Δ, un diamètre AB, et un point M sur Δ. Soit H la projection de M sur AB; projetons H, en K, sur AM. La perpendiculaire élevée à KH, en son milieu, rencontre en T la tangente à Δ, au point M. On trace TK et, en K, on lui élève une perpendiculaire qui coupe AB en un certain point N.

Démontrer que NH est le quart de AH. *(G. L.)*

711. — Dans un arc de cercle donné ACB, on inscrit une ligne brisée régulière : démontrer que le centre de gravité de cette ligne s'éloigne du centre à mesure que le nombre des côtés augmente. *(H. Dellac.)*

712. — On donne la fraction $\frac{2n+1}{2n(n+1)}$ dans laquelle n désigne un nombre entier positif.

1° Démontrer que cette fraction est toujours irréductible;

2° Trouver toutes les valeurs de n pour lesquelles la fraction peut se convertir exactement en fraction décimale.

(H. Dellac.)

713. — Soit donné un triangle dont les côtés sont a, b, c; si m_1, m_2, m_3 sont les médianes, b_1, b_2, b_3 les bissectrices et s_1, s_2, s_3 les symédianes du triangle, on a

$$\frac{2m_1b_1}{s_1}\cdot\frac{2m_2b_2}{s_2}\cdot\frac{2m_3b_3}{s_3}=\frac{(a^2+b^2)(b^2+c^2)(c^2+a^2)}{(a+b)(b+c)(c+a)}$$

(Georges F. d'Avillez.)

714. — Si trois nombres positifs x, y, z, sont tels que

$$x+y+z=1,$$

démontrer que

$$(x^2+y^2+z^2)-(x^3+y^3+z^3)>6xyz.$$

(Georges F. d'Avillez.)

715. — En partant des deux nombres donnés a, b on peut

former une suite indéfinie de termes tels que chacun d'eux soit égal alternativement à la moyenne arithmétique et à la moyenne géométrique entre les deux termes précédents; démontrer que cette suite de termes a pour limite $\dfrac{\sqrt{b^2 - a^2}}{arc\cos\dfrac{a}{b}}$ ou bien $\dfrac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\log\dfrac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{b}}$ suivant que b est plus grand ou plus petit que a.

C'est une généralisation du théorème de Schwab.

(H. Dellac.)

716. — Démontrer que

$$\frac{a^2b^2}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^2(a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta)}$$
$$= \frac{(a^2+b^2)^2}{a^2b^2}\cdot\frac{1}{a^4\sin^2\theta + b^4\cos^2\theta} - \frac{(a^2+b^2)}{a^2b^2}\cdot\frac{1}{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta}$$
$$- \frac{1}{(a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta)^2}.$$

(E.-N. Barisien.)

717. — Comment peut-on écrire immédiatement les carrés des nombres de la forme $10a + 5$ et $100a + 5$? ($a < 10$).

(Jean Negretzu.)

718. — Les carrés des nombres de la forme $10a+5$, $100a+5$ et $1000a + 5$ étant supposés formés, comment peut-on écrire immédiatement les racines carrées.

(Généraliser.) *(Jean Negretzu.)*

RECTIFICATIONS

1° A propos de la note placée au bas de la page 41, on nous a fait observer que la question proposée aux examens de baccalauréat à la Faculté de Montpellier n'est pas celle qu'on nous avait transmise.

Il faut lire $\cos x \cos y = b$,
et non $\cos x + \cos y = b$,
comme on nous l'avait fait dire.

2° Page 13, ligne 11; au lieu de *produit des diamètres* lisez *double produit des rayons*.

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 3588-2-96.

ÉTUDE SUR L'INVOLUTION GÉNÉRALISÉE

Par M. **A. Noyer**, élève à l'École polytechnique, et M. **Ch. Michel**, élève à l'École normale supérieure.

(*Suite* et *fin*, voir page 54.)

26. — Nous terminerons ce travail, dans lequel nous avons démontré d'une manière systématique les théorèmes les plus importants de la théorie des quadriques, par l'étude d'un article que M. Neuberg a publié en 1870 dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*. Cet article est relatif à la théorie des *indices*, imaginée par Faure. L'auteur s'est attaché à montrer la profonde analogie qu'il y a entre les couples de points en involution sur une droite, les triangles conjugués à une conique, etc. Il a imaginé, pour marquer cette analogie, les expressions d'involutions linéaire, plane et solide. Nous leur préférons celles d'involutions binaire, ternaire, quaternaire ; car, ce qui importe surtout, comme nous venons de le voir, c'est le nombre des éléments qui entrent dans les groupes en involution.

Les deux théorèmes fondamentaux dont nous nous sommes servis vont nous permettre de présenter les remarquables résultats de M. Neuberg d'une manière plus simple. Nous avons modifié les définitions des *indices* pour mieux montrer l'analogie.

27. — On sait que, si l'on mène par un point M_α une sécante variable à une quadrique, le produit des deux segments portés par cette droite qui ont leur origine en M_α et leurs extrémités sur la quadrique est dans un rapport constant avec le carré du demi-diamètre parallèle. Ce rapport s'appelle, d'après Faure, l'*indice* du point M_α et nous le désignerons par M_α.

Deux points conjugués M_1 et M_2 variant sur une droite qui rencontre la quadrique en a et a', on a, si ω est le milieu de aa' et d la longueur du demi-diamètre parallèle,

$$\mu_1 = \frac{M_1a \,.\, M_1a'}{d^2} = \frac{M_1M_2 \,.\, M_1\omega}{d^2} \quad \text{et} \quad \mu_2 = \frac{M_2M_1 \,.\, M_2\omega}{d^2}.$$

Par conséquent

$$\frac{1}{\mu_1} + \frac{1}{\mu_2} = \frac{d^2}{M_1M_2}\left(\frac{1}{M_1\omega} - \frac{1}{M_2\omega}\right) = -\frac{d^2}{\overline{\omega a}^2} = \text{const.},$$

et

$$\frac{\mu_1\mu_2}{\overline{M_1M_2}^2} = -\frac{M_1\omega \,.\, M_2\omega}{d^4} = -\frac{\overline{\omega a}^2}{d^4} = \text{const.}$$

Donc :

(1) La somme des inverses de deux points conjugués variant sur une droite est constante ;

(2) Le produit des indices est dans un rapport constant avec le carré de la distance des deux points. Nous appellerons ce rapport *indice* de la droite et nous le représenterons par μ_{12}.

De ces deux théorèmes, il résulte, en vertu de notre premier théorème fondamental, que :

(3) La somme des inverses des indices des sommets d'un triangle conjugué $M_1M_2M_3$ par rapport à une conique de la quadrique est constante ;

(4) Le produit des indices est dans un rapport constant avec le carré de la surface du triangle. Le double de la surface du triangle $M_1M_2M_3$ est en effet égal au produit de la distance des points M_1 et M_2 par la distance du point M_3 à la droite M_1M_2. Nous appellerons ce rapport *indice* du plan $M_1M_2M_3$ et nous le représenterons par μ_{123}.

Notre second théorème fondamental nous permet d'en déduire que :

(5) La somme des inverses des indices des sommets d'un tétraèdre conjugué à la quadrique est constante ;

(6) Le produit des indices est dans un rapport constant avec le carré du volume du tétraèdre. Le volume du tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$ est, en effet, égal au sixième du produit de la surface du triangle $M_1M_2M_3$ par la distance du point M_4 au plan $M_1M_2M_3$.

28. — Considérons les deux droites M_3M_1 et M_3M_2 variant en tournant autour du point fixe M_3. Nous avons

$$\mu_{13} = \frac{\mu_1\mu_3}{\overline{M_1M_3}^2} \quad \text{et} \quad \mu_{23} = \frac{\mu_2\mu_3}{\overline{M_2M_3}^2}.$$

Donc

$$\frac{1}{\mu_{13}}+\frac{1}{\mu_{23}}=\frac{1}{\mu_3}\left(\frac{\overline{M_1M_3}^2}{\mu_1}+\frac{\overline{M_2M_3}^2}{\mu_2}\right)=\frac{d^2}{\mu_3}\left(\frac{\overline{M_1M_3}^2}{M_1M_2\,.\,M_1\omega}+\frac{\overline{M_2M_3}^2}{M_2M_1\,.\,M_2\omega}\right).$$

D'après le théorème de Stewart, la parenthèse est égale à

$$1-\frac{\overline{M_3\omega}^2}{\omega M_1\,.\,\omega M_2},$$

et comme le produit $\omega M_1 . \omega M_2$ est constant, on a

$$\frac{1}{\mu_{12}}+\frac{1}{\mu_{23}}=\text{const.}$$

Donc

(7) La somme des inverses des indices de deux droites conjuguées qui varient dans un plan en tournant autour d'un point fixe est constante.

Nous avons, par définition de μ_{13} et de μ_{23} :

$$\mu_{13}\cdot\mu_{23}=\mu_3\cdot\frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{\overline{M_3M_1}^2\,.\,\overline{M_3M_2}^2},$$

et comme

$$M_3M_1\,.\,M_3M_2\,.\,\sin(M_3M_1,\,M_3M_2)=2\text{ surf. }M_1M_2M_3,$$

$$\frac{\mu_{13}\cdot\mu_{23}}{\sin^2(M_3M_1,\,M_3M_2)}=\mu_3\cdot\frac{\mu_1\mu_2\mu_3}{4(\text{surf. }M_1M_2M_3)^2}=\frac{\mu_3}{4}\cdot\mu_{123}=\text{const.}$$

Donc :

(8) Le produit des indices des deux droites est dans un rapport constant avec le carré du sinus de leur angle.

Notre premier théorème fondamental nous permet de conclure du théorème (7) que :

(9) La somme des inverses des indices des côtés d'un triangle conjugué par rapport à une conique de la quadrique est constante ;

(10) La somme des inverses des indices des arêtes d'un trièdre conjugué par rapport à un cône circonscrit à la quadrique est constante.

De ces deux théorèmes, il résulte, en vertu du second théorème fondamental, que :

(11) La somme des inverses des indices des arêtes d'un tétraèdre conjugué par rapport à la quadrique est constante.

29. — Considérons les trois droites M_4M_1, M_4M_2, M_4M_3 variant en tournant autour du point fixe M_4. Nous avons

$$\mu_{41} = \frac{\mu_4\mu_1}{\overline{M_4M_1}^2}, \qquad \mu_{42} = \frac{\mu_4\mu_2}{\overline{M_4M_2}^2}, \qquad \mu_{43} = \frac{\mu_4\mu_3}{\overline{M_4M_3}^2},$$

d'où $$\mu_{41}\cdot\mu_{42}\cdot\mu_{43} = \mu_4^2 \cdot \frac{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}{\overline{M_4M_1}^2\cdot\overline{M_4M_2}^2\cdot\overline{M_4M_3}^2}.$$

Mais le volume du tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$ est égal à

$$V = \frac{1}{6}\, M_4M_1 \,.\, M_4M_2 \,.\, M_4M_3 \sin(\text{angle sol. } M_4).$$

Donc

$$\frac{\mu_{41}\cdot\mu_{42}\cdot\mu_{43}}{\sin^4(\text{angle sol. } M_4)} = \frac{\mu_4^2}{36}\cdot\frac{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}{V^2} = \text{const.}$$

Par conséquent,

(12) Le produit des indices des arêtes d'un trièdre conjugué par rapport à un cône circonscrit à la quadrique est dans un rapport constant avec le carré du sinus du trièdre.

30. — Considérons les deux plans $M_3M_4M_1$ et $M_3M_4M_2$ variant en tournant autour de la droite fixe M_3M_4. Nous avons

$$\mu_{134} = \frac{\mu_1\mu_3\mu_4}{(\text{surf. } M_1M_3M_4)^2} \quad \text{et} \quad \mu_{234} = \frac{\mu_2\mu_3\mu_4}{(\text{surf. } M_2M_3M_4)^2},$$

d'où $$\mu_{134}\cdot\mu_{234} = \mu_3\mu_4\cdot\frac{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}{(\text{surf. } M_1M_3M_4)^2\times(\text{surf. } M_2M_3M_4)^2}$$

Mais le volume du tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$ est égal à

$$V = \frac{2}{3}\,\frac{(\text{surf. } M_1M_3M_4)\times(\text{surf. } M_1M_3M_4)\times\sin(M_1M_3M_4, M_2M_3M_4)}{M_3M_4}.$$

Donc

$$\frac{\mu_{134}\times\mu_{234}}{\sin^2(M_1M_3M_4,\, M_2M_3M_4)} = \frac{4}{9}\,\frac{\mu_3\mu_4}{\overline{M_3M_4}^2}\,\frac{\mu_1\mu_2\mu_3\mu_4}{V^2} = \text{const.}$$

Par conséquent,

(13) Le produit des indices de deux plans conjugués tournant autour d'une droite fixe est dans un rapport constant avec le carré du sinus de leur angle.

Nous avons

$$\frac{1}{\mu_{134}} + \frac{1}{\mu_{234}} = \frac{1}{\mu_3\mu_4}\left(\frac{(\text{surf. } M_1M_3M_4)^2}{\mu_1} + \frac{(\text{surf. } M_2M_3M_4)^2}{\mu_2}\right)$$
$$= \frac{d^2}{\mu_3\mu_4}\left(\frac{(\text{surf. } M_1M_3M_4)^2}{M_1M_2\,.\,M_1\omega} + \frac{(\text{surf. } M_2M_3M_4)^2}{M_2M_1\,.\,M_2\omega}\right).$$

D'après le théorème de Stewart généralisé, la parenthèse est égale à

$$\frac{\overline{M_3M_4}^2}{4}\cdot\sin^2(M_1M_2, M_3M_4) - \frac{(\text{surf. } \omega M_3M_4)^2}{\omega M_1 . \omega M_2},$$

et, comme le produit $\omega M_1 . \omega M_2$ est constant, on a

$$\frac{1}{\mu_{134}} + \frac{1}{\mu_{234}} = \text{const.}$$

Donc :

(14) La somme des inverses des indices de deux plans conjugués tournant autour d'une droite fixe est constante.

Notre premier théorème fondamental nous permet d'en conclure que :

(15) La somme des inverses des indices des faces d'un trièdre conjugué par rapport à un cône circonscrit à la quadrique est constante.

Nous en déduisons, au moyen de notre second théorème, que :

(16) La somme des inverses des indices des faces d'un tétraèdre conjugué par rapport à la quadrique est constante,

31. — Remarquons enfin, avec M. Neuberg, les deux propriétés fondamentales des involutions binaire, ternaire et quaternaire.

I. La somme des inverses des indices de deux droites ou de deux plans variant en involution binaire ; — de trois points, de trois droites dans un même plan ou passant par un même point, de trois plans variant en involution ternaire ; — de quatre points ou de quatre plans variant en involution quaternaire, est constante.

II. Le produit des indices de deux points, de deux droites ou de deux plans variant en involution binaire ; — de trois points, de trois droites passant par un même point variant en involution ternaire ; — de quatre points variant en involution quaternaire, est dans un rapport constant avec le carré de la distance des deux points, du sinus de l'angle des deux droites ou du sinus de l'angle des deux plans ; — le carré de la surface du triangle formé par les trois points, du sinus du trièdre formé par les trois droites ; — le carré du volume du tétraèdre qui a pour sommets les quatre points.

SUR LES CERCLES RADICAUX

Par M. **Juan-J. Duran-Loriga**, commandant d'artillerie, à La Corogne.

On sait que le lieu géométrique des points tels que leurs puissances par rapport à deux circonférences fixes conservent un rapport donné $\frac{m}{n}$ est une circonférence. Si nous supposons $m = -n$, cette ligne sera donc le lieu des points tels que leurs puissances relatives à deux autres circonférences soient égales et de signes contraires. Par une analogie naturelle, nous la nommerons *circonférence radicale* (*) des proposées.

Il est très aisé à déterminer son centre et son rayon.

Appelons P_0 et P_0' les puissances d'un point P du plan par rapport aux circonférences O,O'. L'on aura $P_0 + P_0' = 0$. D'après cela l, l' étant les distances de P aux centres, d la distance OO'; on a

$$l^2 + l'^2 = R^2 + R'^2.$$

Le centre de la circonférence en question est, par conséquent, le milieu de OO'; son rayon ρ est donné par la formule

$$(1) \qquad \rho = \frac{1}{2}\sqrt{2(R^2 + R'^2) - d^2}.$$

Pour que la circonférence radicale existe, il faut que l'on ait $d < \sqrt{2(R^2 + R'^2)}$; cette condition se réalise toujours, lorsque les circonférences sont tangentes (soit extérieures, soit intérieures) sécantes ou intérieures, mais si elles sont extérieures, la circonférence radicale sera réelle ou imaginaire.

Lorsque les circonférences sont sécantes, la circonférence radicale devant évidemment passer par les points communs (points de puissance zéro), l'on pourra la décrire immédiatement. Quand elles sont tangentes extérieures, la circonférence

(*) Quelques auteurs, surtout les Anglais, appellent « cercle radical » celui qui coupe orthogonalement trois autres ; mais il nous semble préférable d'adopter la dénomination très usitée de « cercle orthotomique » et d'appeler cercle radical celui dont l'étude nous occupe.

radicale sera tangente intérieurement à celle qui a le plus grand rayon au point de tangence, et comme leur centre est dans tous les cas le milieu de la ligne des centres, son tracé est immédiat. Si l'on veut calculer son rayon on fera, dans (1), $d = R + R'$, dans la valeur de ρ, et il en résulte, par conséquent

$$\rho_1 = \frac{1}{2}(R - R').$$

Quand les circonférences données sont tangentes intérieurement, la circonférence radicale est tangente à celles-ci au point commun et son rayon est

$$\rho_2 = \frac{1}{2}(R + R').$$

Si les circonférences données sont concentriques, la circonférence radicale est concentrique à celles-ci et l'on obtiendra son rayon faisant $d = 0$, dans la formule (1); on a donc

$$\rho_3 = \frac{1}{2}\sqrt{2(R^2 + R'^2)}.$$

Pour le tracé graphique de la circonférence radicale relative à deux circonférences extérieures (quand elle existe) ou de deux circonférences intérieures, on le détermine par les considérations que nous allons exposer.

Considérons trois circonférences O, O' et O'', appelons $\Pi_{00'}$ la circonférence radicale de O et O'; $\Pi_{00''}$, celle de O et O''; si ces circonférences se coupent, l'on aura pour les points d'intersection

$$\begin{cases} P_0 = - P_{0'}, \\ P_0 = - P_{0''}, \end{cases}$$

et, par conséquent, $P_{0'} = P_{0''}$, c'est-à-dire que l'axe radical de O' et O'' est aussi l'axe radical de $\Pi_{00'}$ et $\Pi_{00''}$. Lorsque les circonférences radicales ne se coupent pas, il est aussi facile de donner une démonstration géométrique, et encore plus aisé de le démontrer analytiquement, comme nous ferons dorénavant.

Cette observation suggère un moyen de trouver la circonférence radicale de deux circonférences extérieures (si elle existe) ou de deux circonférences intérieures O et O'.

Coupons-les par une troisième circonférence O'' et déter-

minons la circonférence radicale de O et de O′; puis l'axe radical de O′ et de O″. On aura ainsi un ou deux points de la circonférence que l'on veut déterminer et dont le centre est connu.

La circonférence O″ doit être tellement choisie que l'axe et la circonférence radicale se coupent.

S'il se présente un cas où les données soient extérieures (seul cas où il peut y avoir impossibilité) pour voir si la circonférence radicale est réelle, on peut employer la construction suivante:

Élevons à l'extrémité du rayon OA la perpendiculaire AB égale au rayon R′ de l'autre circonférence; traçons OB, puis la perpendiculaire BC = OB; si la circonférence décrite avec le rayon OC enveloppe le centre O′, la circonférence radicale existe.

La simplicité de cette construction épargne d'autres explications. Lorsque deux circonférences sont orthogonales, on voit bien clairement que la circonférence radicale correspondante passe par leurs centres, comme on le déduit aussi de la valeur de ρ. On a, en effet, $R^2 + R'^2 = \overline{OO'}^2$, et par suite $\rho = \frac{1}{2}OO'$. La réciproque se vérifie facilement.

La considération de circonférences radicales nous permet de résoudre immédiatement le problème suivant :

L'on a deux circonférences Δ, Δ' *tangentes (intérieurement par exemple) de centres* O *et* O′ *et de rayons respectifs* R *et* R′*; par le point de tangence* P, *traçons des sécantes telles que* pam, *et prenons en sens contraire* am′ = am. *Quel est le lieu géométrique du point* m′?

Traçons la circonférence O″ qui ait comme circonférence radicale, par rapport à Δ, Δ'; on a, en valeur absolue, $ap.am = ap.am$; ou, $am' = am$; le lieu cherché est, par conséquent, la circonférence O″.

Pour déterminer son rayon x, il faut observer que

$$R' = \frac{1}{2}(R - x),$$

d'où

$$x = R - 2R'.$$

La circonférence trouvée est tangente (extérieurement ou

intérieurement) à Δ; extérieurement, lorsque $R - 2R'$ est positif; intérieurement, dans les cas contraires. Si Δ' passe par le point O, le lieu géométrique se réduit au point P; ce résultat est évident.

Nous avons vu précédemment que si l'on a trois circonférences O, O′ et O″ et que l'on détermine les circonférences radicales de deux groupes (O, O′ et O, O″, par exemple) l'axe radical de ces circonférences radicales est le même que celui des circonférences du troisième groupe. Cela nous permet de démontrer facilement que les circonférences décrites sur les médianes d'un triangle comme diamètres ont, deux à deux, pour axes radicaux les hauteurs de ce triangle. Il faut observer, en effet, que si, sur les côtés d'un triangle comme diamètres, l'on décrit des circonférences, les radicales de celles-ci sont celles que l'on a tracées sur les médianes (par exemple, celle qui correspond aux circonférences décrites sur b et c est celle qui a comme diamètre la médiane relative au côté a); il résulte donc, de cette observation, que les axes radicaux des dernières sont les mêmes que ceux qui correspondent aux premières; c'est-à-dire les hauteurs du triangle. Nous avons donc six circonférences dont le centre radical commun est l'orthocentre du triangle donné.

Si nous considérons, à présent, les circonférences décrites des milieux des côtés comme centres avec des rayons égaux aux médianes correspondantes, et celles que nous avons nommées (par des raisons exposées, *Progreso Matematico*, vol. V, p. 70) *circonférences potentielles*, il est évident que les susdites circonférences sont celles que l'on a décrites en prenant comme diamètres les médianes du triangle anticomplémentaire. D'ailleurs, et en vertu de ce que nous avons dit précédemment, ces circonférences sont les radicales de celles que nous avons décrites sur les côtés de ce dernier triangle; nous pouvons dire, en conséquence, que les *circonférences décrites des sommets d'un triangle comme centres, avec des rayons égaux aux côtés opposés, ont pour circonférences radicales les potentielles du susdit triangle.* On voit alors pourquoi leur centre radical est l'orthocentre du triangle anticomplémentaire du proposé.

Voilà donc un second groupe de six circonférences qui ont le même centre radical.

Nous avons dit que lorsque deux circonférences sont orthogonales, la circonférence radicale a comme diamètre la ligne des centres, et comme le cercle de Longchamps (*) est orthotomique à ceux que nous avons décrits des sommets comme centres, avec des rayons égaux aux côtés opposés, il s'ensuit que les circonférences qui ont pour diamètres les droites qui joignent les sommets d'un triangle à l'orthocentre de son anticomplémentaire sont les radicales du cercle de Longchamps et des trois autres cercles cités plus haut.

Le même critérium peut nous être utile pour trouver les circonférences radicales de quelques autres circonférences remarquables du triangle; mais, dans tous les cas, on peut utilement avoir recours à la Géométrie Analytique.

Soient $C = 0$, $C' = 0$ les équations de deux circonférences, celle de la radicale sera $C + C' = 0$, soit qu'il s'agisse de coordonnées cartésiennes, soit qu'on ait affaire à des coordonnées trilinéaires; la circonférence radicale correspondant à celles qui sont représentées par les équations :

$$x^2 + y^2 + 2Ax + 2By + C = 0.$$
$$x^2 + y^2 + 2A'x + 2B'y + C' = 0;$$

a pour équation :

$$x^2 + y^2 + (A + A')x + (B + B')y + \frac{1}{2}(C + C') = 0.$$

Si l'on prend, en particulier, la ligne des centres pour l'axe des x et que l'une d'elles ait son centre à l'origine (axe rectangulaire), la circonférence radicale sera :

$$\left(x - \frac{\alpha}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{2(R^2 + R'^2) - \alpha^2}{4},$$

résultat qui vérifie (ce que nous avons vu précédemment) que pour que la circonférence radicale existe, la distance de centres doit être inférieure à $\sqrt{2(R^2 + R'^2}$.

Si cette distance est $\sqrt{2}\,(R^2 + R'^2)$, la circonférence est réduite à un point placé sur la ligne des centres, intérieure-

(*) Voyez *J. S.*, 1886, p. 57.

ment à la circonférence de plus grand rayon et à une distance de son centre égale à la moitié de la précédente quantité.

Quand il s'agit de coordonnées barycentriques et que les circonférences données sont, dans la forme indiquée par M. de Longchamps (*J. S.*, 1886, p. 57), représentées par

$$\Sigma\alpha \times \Sigma u\alpha - \Sigma a^2\beta\gamma = 0,$$
$$\Sigma\alpha \times \Sigma u'\alpha - \Sigma a^2\beta\gamma = 0,$$

la circonférence radicale a pour équation

$$\Sigma\alpha \,.\, \Sigma(u + u')\alpha - 2\Sigma\alpha^2\beta\gamma = 0.$$

Il est très facile de prouver analytiquement un cas que nous avons observé précédemment; c'est que si nous avons trois circonférences O O′ O″ et que nous les groupions deux à deux, l'axe radical des circonférences radicales de deux groupes l'est aussi du troisième.

Nous avons, en effet, si nous appelons $C = 0$, $C' = 0$, $C'' = 0$, les équations des trois circonférences données :

La circonférence radicale de $\begin{matrix} C = 0, \\ C' = 0, \end{matrix}$ est $C + C' = 0$, L'axe radical de $\begin{matrix} C + C' = 0, \\ C + C'' = 0, \end{matrix}$ est $C' - C'' = 0$,

celle de $\begin{matrix} C = 0, \\ C'' = 0, \end{matrix}$ est $C + C'' = 0$, L'axe radical de $\begin{matrix} C' = 0, \\ C'' = 0, \end{matrix}$ est $C' - C'' = 0$.

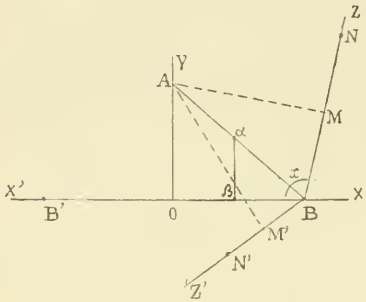
Si, après avoir trouvé les circonférences radicales correspondant à trois circonférences données, nous opérons de même (quand on le peut) avec celles que nous obtenons successivement, il pourra en résulter des séries triples de cercles soumis à certaines liaisons dont l'étude ne peut manquer d'être bien curieuse.

La considération de circonférences radicales dans la Géométrie du triangle appliquée à des cercles remarquables de celui-ci, à d'autres cercles et à des droites ou à des points remarquables de ce triangle, conduira, croyons-nous, à des faits intéressants. Pour l'instant, nous nous bornerons à signaler des idées que nous nous proposons de développer à une autre occasion.

COMPARAISON DES CONSTRUCTIONS RELATIVES A L'ÉQUATION $a \sin x + b \cos x = c$ (*)

Par M. **Bernès.**

1° *Solutions Lauvernay et Lemoine.* — Les deux solutions sont identiques au point de vue graphique. L'explication en peut être rendue intuitive. Si l'on considère le triangle OAB dont les côtés OA, OB sont a, b et dont l'angle (OB, OA) est égal à $+\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ selon que, b étant supposé positif, a est positif ou négatif, $b \cos x + a \sin x$ est la projection du contour BOA ou de sa résultante BA sur un axe BZ qui fait l'angle x avec BO, (BZ, BO) $= x$, et comme cette projection BM est égale à c, M est l'intersection du cercle B(c) et du cercle décrit sur AB comme diamètre.



Telle quelle, la construction s'exécute ainsi :

Droite arbitraire X'X	1	(**)
Cercles O(a), O(b) dont le second coupe X'X en B, B'	4 + 4	
B(c), B(ρ), B'(ρ) où ρ est arbitraire	4 + 1 + 2	
OY intersection de B(ρ), B'(ρ) qui coupe O(a) en A	3	

(*) Cet article, composé avant que j'aie eu connaissance de celui de M. Lemoine, a dû être modifié pour éviter les redites et pour mentionner la Solution Lemoine. (Voyez *J. E.* p. 59).

(**) Si l'on tient à distinguer les opérations élémentaires relatives au tracé des droites et des cercles et celles qui se rapportent à la mise en place de l'instrument, règle ou compas, on peut, au lieu de la notation Lemoine, qui est trop longue, désigner par δ, γ l'opération du tracé de la droite ou du cercle, et mettre en indice les opérations de mise en place : ainsi δ_2 remplacera $R_2 + 2R_1$, γ_3 remplacera $C_3 + 3C_1$ ou $C_3 + 2C_1 + C_2$. Le compte s'en fait de même.

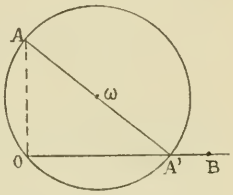
AB 3
A(ρ) et l'intersection de A(ρ) et B(ρ) qui donne α, milieu de AB . . . . . 2 + 3
α(αA) qui coupe B(c) en M et M′, BM, BM′ . 3 + 3 + 3

Simplicité 36, 6 droites, 7 cercles.

Les angles (BZ, BO), (BZ′, BO) sont les deux valeurs de x, BZ et BZ′ ayant les sens BM, BM′ ou les sens contraires, selon que c est positif ou négatif.

Lorsque c est plus grand que b et que $\frac{AB}{2}$, on peut prendre $\rho = c$, ce qui supprime le cercle B (ρ) et réduit la simplicité à 35.

Simplification. — Au lieu de déterminer BZ par le point M, on peut le déterminer par le point N situé à la distance BN = 2BM = 2c. On a AN = AB, N est donc l'intersection des cercles A(AB), B(2c) (2c s'obtient comme diamètre du cercle B(c)).



On supprime ainsi A(ρ), AB, la perpendiculaire, au milieu de AB, et α(αA).

Économie 4; simplicité 32, 4 droites et 7 cercles.

Mais on peut ramener le nombre des cercles à 6, ou même à 5.

On trace un cercle arbitraire ω et dans ce cercle un diamètre quelconque AA′ . . . 1 + 2
Le cercle A(a) coupe ω en O, on trace OA′ 4 + 3
O(b) coupe OA′ en B, on trace B(c), B(2c), A(AB). . . . . 4 + 4 + 4 + 3
On joint B aux intersections N, N′ de B(2c) et A(AB) . . . . . 3 + 3

Simplicité 31.

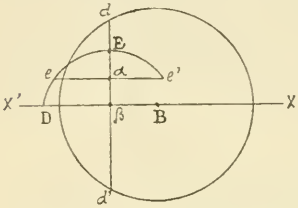
Dans le cas de $c > \frac{a}{2}$, il convient de prendre c pour rayon du cercle ω, le diamètre AA′ est alors 2c et B(c) devient inutile.

Simplicité 29, 4 droites, 5 cercles.

Une autre manière d'opérer, que M. Lemoine a écartée comme trop longue, mais qui est en réalité très simple,

consiste à remplacer le triangle OAB par le triangle $\beta\alpha B$ dont les côtés de l'angle droit $\beta\alpha$, βB sont $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$; les points M, M′ s'obtiennent alors par l'intersection des cercles $B(c)$, $\alpha(\alpha B)$.

D'un point B de X′X on décrit $B(b)$ qui coupe X′X en D et que $D(b)$ coupe en d, d'. La droite dd' donne le milieu β de BD



$$\delta + \gamma_3 + \gamma_1 + \delta_2.$$

De même, on coupe le cercle $\beta(a)$, qui rencontre dd' en E, par $E(a)$: l'intersection cc' donne le milieu α de βE

$$\gamma_3 + \gamma_1 + \delta_2.$$

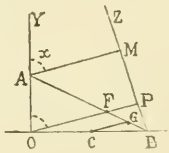
Il n'y a plus qu'à tracer $\alpha(\alpha B)$, $B(c)$ et BM, BM′.

$\gamma_2 + \gamma_3 + 2\delta_2$. En tout $\delta + 4\delta_2 + 2\gamma_1 + \gamma_2 + 3\gamma_3$.

Simplicité 32.

Dans la pratique, où les données a, b, c sont habituellement des nombres et non des longueurs. et où les longueurs qui représentent $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$ sont aussi faciles à construire que celles qui représenteraient a et b, cette substitution de $\beta\alpha B$ à OAB constituera la plus simple de toutes les solutions.

Enfin, la solution Lauvernay ou Lemoine peut se ramener aux solutions Droz-Farny ou de Longchamps. L'angle x ou ZBO est égal à MAY ou POY, P étant la projection de O sur BZ. Or, on voit aisément que si F est l'intersection OP et AB, $OP = \frac{ab}{c}$, de sorte que F et par suite x s'obtient par l'intersection de AB et $O\left(\frac{ab}{c}\right)$, ce qui est un des modes opératoires de la solution de Longchamps.

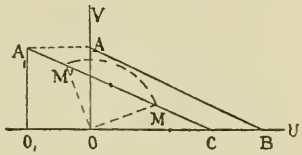


Ou mieux, si $BC = c$ et que CG soit parallèle à OP, $CG = a$. Ce qui ramène à la solution Droz-Farny : *Construire* OAB, *prendre* $BC = c$ *et couper* AB *par* $C(a)$; l'angle que fait la droite CG, ainsi obtenue, avec OY est l'angle x.

Solution Droz-Farny. — En construisant OAB, comme dans

le premier mode de la construction Lauvernay, on a pour simplicité 30, et si c est $> b$, elle se réduit à 29. (M. Lemoine a trouvé 28, mais il n'a pas compté le tracé de AB, ce qui fait 31.)

Solution de Longchamps. — Si, ρ étant arbitraire, on pose $\rho \sin x = u$, $\rho \cos x = v$ et que M et M′ soient les intersections du cercle $u^2 + v^2 = \rho^2$ et de la droite $au + bv = c$, les angles MOV, M′OV sont les valeurs de x. La droite $au + bv = c$ est une parallèle à la droite AB des solutions précédentes menée par le point $v = 0$, $u = \frac{c\rho}{a}$. Si l'on prend $\rho = \frac{ab}{c}$, cette parallèle coïncide avec AB; il n'y a donc qu'à couper AB par le cercle $O\left(\frac{ab}{c}\right)$. Mais il est plus simple de prendre $\rho = a$, la parallèle à AB passe alors par le point C situé à la distance $OC = c$. Si donc au lieu du triangle OAB on construit le triangle égal CO_1A_1, on est ramené à la solution Droz-Farny.



Conclusion. — Au point de vue géométrographique, toutes ces solutions se valent à peu près. Celles de MM. Lemoine et Lauvernay se confondent; et le mode opératoire le plus simple de la solution proposée par M. de Longchamps se confond avec celui qui correspond à la solution de M. Droz-Farny.

QUESTION 184

Solution par M. J. Chapron.

On donne une circonférence O *et deux points fixes* I *et* I′ *sur un même diamètre; on imagine, en outre, un diamètre mobile dont les extrémités sont* A *et* A′. *Cela posé, on considère la circonférence* IAO *et la circonférence* I′A′O; *ces circonférences se coupent en un point* M *dont on demande le lieu.*

1° *Discuter ce lieu lorsque les points* I *et* I′ *prennent différentes*

positions; en particulier, chercher ce qui arrive lorsque I *et* I′ *sont symétriques par rapport à* O *et indiquer dans quelles conditions ce lieu est tout entier à l'intérieur ou tout entier à l'extérieur du cercle* O;

2° *Ce lieu est un certain cercle* ω; *calculer son rayon et sa distance au point* O;

3° *Cela fait, on demande de démontrer que les circonférences qui sont tangentes à* ω *au cercle* O *et qui passent par* O, *passent aussi forcément par un des points* I *et* I′; *étudier les conditions de possibilité et faire voir que les cercles possibles demandés sont en nombre : zéro, deux ou quatre;*

3° *bis. Si par un point* M *du lieu on mène une circonférence tangente en* O *à* II′, *le lieu géométrique du point* ω *d'intersection avec le diamètre mobile* AA′ *correspondant au point* M *est un cercle de centre* O;

4° *On fait varier le rayon du cercle sans changer le centre, ni la position des points* I *et* I′; *étudier le déplacement du centre* ω *pour les différentes valeurs du rayon variable et démontrer que la polaire de* O *par rapport aux diverses circonférences du lieu est une droite invariable;*

5° *Généraliser le problème par projection conique, à l'aide de deux sections circulaires antiparallèles.* (Eug. Vigneron.)

Soient $OA = R$, $OI = d$, $OI' = d'$.

Transformons la figure par rayons vecteurs réciproques, en prenant R^2 pour puissance d'inversion; I, I′ ont pour inverses les points i, i'; les circonférences IAO, I′A′O passant par l'origine deviennent des droites Ai, A′i', et M vient en m, etc. Joignons Ai', A′i qui se coupent en n et prolongeons les droites mO, iA′ jusqu'à leur rencontre en R.

Dans le quadrilatère complet Ami'OiR, la diagonale IA′ est divisée harmoniquement en n et R par les deux autres : le faisceau minA′R est harmonique et la division mki'O qu'il détermine sur Oi l'est aussi. De plus, le diamètre AA′ étant divisé en deux parties égales par les droites mA, mO, mA′ issues du point m, si par ce point on mène une parallèle à AA′, cette parallèle et les trois droites citées détermineront un faisceau harmonique, donc cette parallèle se confond

avec mkn et O, i, i' étant fixes, le point k l'est également. De plus, mk étant parallèle à OA, le rapport $\frac{mk}{OA} = \frac{ik}{iO}$ = constante.

Donc le lieu du point m est un cercle de centre k, homothétique au cercle O, i ou i' étant le centre et $\frac{ik}{iO}$ ou $\frac{i'k}{i'O}$ le rapport d'homothétie. D'ailleurs, i et i' sont les centres de similitude des cercles O et k.

En revenant à la figure primitive, on voit que la proposition énoncée est vérifiée.

Si l'on cherche le lieu du point N d'intersection des circonférences IA'O, I'AO, on trouvera la même circonférence.

1° $Oi = \frac{R^2}{d}$, $Oi = \frac{R^2}{d'}$ $\frac{2}{Ok} = \frac{1}{Oi} + \frac{1}{Oi'} = \frac{d + d'}{R^2}$, OK(*) $= \frac{R^2}{Ok}$ $= \frac{d + d'}{2}$; ainsi le pied de la polaire de O par rapport au cercle ω passe par le milieu de II'. Pour trouver à quelles conditions le lieu est intérieur ou extérieur au cercle O, calculons les distances des extrémités du diamètre ef au centre O et celles de leurs inverses E et F.

$$\frac{mk}{R} = \frac{ik}{iO} = \frac{Oi - Ok}{Oi} = \frac{\frac{R^2}{d} - \frac{2R^2}{d + d'}}{\frac{R^2}{d}} = \frac{d' - d}{d + d'};$$

$$Oe = Ok + mk = \frac{2R^2}{d + d'} + R\frac{d' - d}{d + d'} = \frac{R}{d + d'}(2R - d' + d),$$

$$Of = Ok - mk = R\frac{2R + d' - d}{d + d'}.$$

Par suite $OE = \frac{R^2}{Oe} = R\frac{d + d'}{2R + d - d'}$, $OF = R\frac{d + d'}{2R + d' - d}$.

Pour que le lieu soit intérieur à la circonférence O, il faut que OE et OF soient plus petits que R et par suite que l'on ait $\frac{d + d'}{2R + d - d'} < 1$ et $\frac{d' + d}{2R + d' - d} < 1$ ou $d < R$

(*) K désigne le point inverse de k.

et $d' < R$. Pour que le lieu soit extérieur, il faut que $d > R$ et $d' > R$. Enfin, si l'un des points I et I′ est à l'intérieur et l'autre à l'extérieur du cercle O, la circonférence ω et la circonf. ω seront sécantes.

Quand les points I et I′ sont symétriques par rapport à O, le point k est rejeté à l'infini ; de plus $d = -d'$ et mk est infiniment grand ; ainsi le cercle k devient la droite de l'infini. Si l'on revient à la figure primitive, on obtiendra pour le lieu cherché le point O. Ces résultats sont évidents à la simple inspection de la figure.

On discuterait facilement le problème pour les différentes positions de I, I′.

2° Le diamètre EF du cercle ω

$$= OE - OF = 2R(d + d')(d' - d)\frac{1}{4R^2 - (d' - d)^2};$$

le rayon est $R\dfrac{d'^2 - d^2}{4R^2 - (d' - d)^2}$; la distance du centre ω au centre O est $O\omega = \dfrac{OE + OF}{2} = 2R^2\dfrac{d + d'}{4R^2 - (d' - d)^2}$.

3° Dans la figure inverse, ces circonférences se transforment en des droites, puisqu'elles passent par l'origine ; elles ont donc pour inverses les tangentes communes aux circonférences O et k ; ces tangentes passent par l'un des points i, i', centres de similitude ; donc les circonférences considérées passent par l'un des points I, I′, et sont en nombre 0, 2 ou 4, puisque deux circonférences admettent 0, 2 ou 4 tangentes communes.

3° *bis*. Dans la transformation, cette circonférence passant par l'origine, devient une droite mp parallèle à Oi ; la figure $Opmk$ est un parallélogramme et $Op = mk =$ constante. Ainsi le lieu de p est une circonférence de centre O ; on en conclut le théorème énoncé en revenant à la figure primitive. Le rayon $O\omega = \dfrac{R^2}{mk} = R\dfrac{d + d'}{d' - d}$.

4° Si d et d' sont constants et R variable, l'expression de la distance $O\omega$ peut s'écrire $\dfrac{1}{O\omega} = \dfrac{4R^2 - (d' - d)^2}{2R^2(d + d')}$, ou

$\frac{d + d'}{O\omega} = 2 - \frac{(d' - d)^2}{2R^2}$. On discutera facilement sous cette dernière forme la variation de $O\omega$; nous laissons ce soin au lecteur (*).

QUESTION 597

Solution par M. Ernest Foucart.

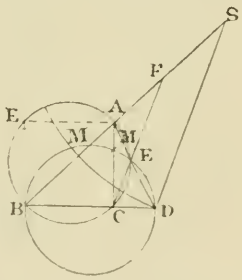
Sur le côté BC *du triangle* ABC *un point* D *s'éloigne à l'infini.* E *étant le point de rencontre de* AD *avec la circonférence* ABC, *et* S *la rencontre de* AB *avec la parallèle menée par* D *à* CE, *déterminer la position-limite du second point d'intersection de la circonférence* BED *et de la circonférence décrite de* S *comme centre avec* SD *pour rayon.* (Bernès.)

On a $\frac{SD}{FC} = \frac{SB}{FB}$, $\frac{SD}{FE} = \frac{SA}{FA}$.

D'où, en multipliant,

$$\frac{\overline{SD}^2}{FC.FE} = \frac{SA.SB}{FA.FB},$$

ou $$\overline{SD}^2 = SA.SB.$$



La circonférence (S, SD) est orthogonale à la circonférence ABC. Sa position limite est donc le diamètre de ABC perpendiculaire à AB. Le point E a pour limite E_1 obtenu en menant AE_1 parallèle à BC.

Finalement, le point limite cherché est l'intersection de BE_1 et du diamètre de ABC perpendiculaire à AB.

(*) La cinquième partie reste à trouver.

QUESTION 645

Solution par M. H. L'Huillier.

On donne un parallélogramme oaba'. *Sur la droite* ab, *on prend arbitrairement le point* m *que l'on projette orthogonalement en* n *sur* oa *et ce point* n *est projeté de même en* p *sur* ab. *La droite* po *coupe* a'b *en* m' *que l'on projette en* n' *sur* oa' *et ce point* n' *est projeté en* p' *sur* a'b. *Démontrer que les points* m, o, p', *appartiennent à une même droite.*

(Mannheim.)

Les triangles semblables $m'bp$ et $m'a'o$ donnent :

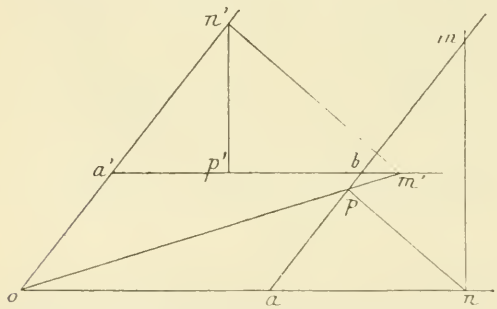
$$\frac{a'm'}{a'b} = \frac{oa'}{oa' - bp} = \frac{oa'}{ap},$$

d'où

(1) $$a'm' \,.\, ap = oa \,.\, oa'.$$

Cette relation exprime que les points o, p, m' sont en ligne droite.

Les triangles semblables amn et $a'm'n'$ donnent :



$$\frac{a'm'}{a'n'} = \frac{am}{an};$$

de même les triangles semblables $a'n'p'$ et anp donnent

$$\frac{a'n'}{a'p'} = \frac{an}{ap}.$$

Multipliant membre à membre ces deux dernières égalités on a

$$\frac{pm'}{a'p'} = \frac{am}{ap}$$

ou $$a'm' \,.\, ap = am \,.\, a'p',$$

et, d'après (1),

$$am.a'p' = oa.oa';$$

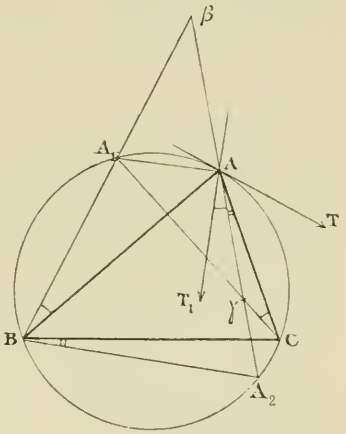
ce qui exprime que les points o, p', m sont en ligne droite.

QUESTION 646

Solution et généralisation par M. H. L'Huillier.

Dans la circonférence circonscrite à ABC, AA_1 AA_2 *étant deux cordes rectangulaires, si* β, γ *sont les points où* BA_1; CA_1 *rencontrent* AA_2, *les cercles* $AB\beta$, $AC\gamma$ *sont orthogonaux au cercle* ABC. *Généraliser en supposant que les cordes* AA_1, AA_2 *font un angle donné* α. (Bernès.)

Soient les cordes AA_1, AA_2 faisant entre elles l'angle α. La tangente au cercle $AC\gamma$ au point A est la droite AT_1 telle que $\widehat{A_2AT_1} = ACA_1$. La tangente au cercle ABC fait avec AC un angle égal à $\widehat{B}$. On voit immédiatement sur la figure que l'angle TAT_1 est égal à l'angle A_1BA_2 et par suite au supplément de α.



Ainsi AA_1, AA_2 faisant l'angle α, les cercles $AB\beta$, $AC\gamma$ coupent le cercle ABC sous l'angle α, ou sous l'angle supplémentaire.

QUESTIONS PROPOSÉES

719. — Dans tout triangle T, de sommets A, B, C :

1° Le produit des distances d'un sommet aux quatre centres des cercles tangents aux trois côtés est égal au produit des carrés des deux côtés aboutissant au sommet considéré.

2° Le produit des douze distances de chacun des centres des cercles tangents aux trois côtés de T aux sommets de ce triangle est égal à la quatrième puissance du produit des trois côtés.

3° Le produit des segments interceptés par les sommets de

T sur les côtés du triangle formé par les centres des cercles inscrits à T est égal au carré du produit des trois côtés de T.

4° Le rayon du cercle circonscrit au triangle formé par trois quelconques des quatre centres des cercles tangents aux côtés de T est égal au double du rayon du cercle circonscrit à T.

5° L'aire du triangle formé par le centre des cercles exinscrits à T est équivalente au produit du périmètre de T par le rayon de son cercle circonscrit.

6° Les aires des triangles formés par les centres des quatre cercles tangents à T sont inversement proportionnelles, chacune au rayon du cercle tangent dont le centre n'est pas un sommet du triangle.

7° On considère le triangle dont un des sommets est le centre du cercle exinscrit dans l'angle A et les autres sommets sont B et C.

On considère les deux triangles analogues. Le produit des aires de ces trois triangles, multiplié par le produit des rayons de leurs cercles circonscrits, est égal au cube de l'aire de T, multiplié par le cube du rayon de son cercle circonscrit.

(E.-N. Barisien.)

720. — On partage la suite 1, 3, 5,... en groupes contenant la première a nombres, la seconde a^2, et ainsi de suite. Soit S_n la somme des nombres du $n^{\text{ième}}$ groupe et soit S'_n la somme correspondante lorsque l'on opère de la même manière sur la suite 2, 4, 6, 8,...

On a : 1° $$(S'_1)^2 = (S'_2).$$

Existe-t-il d'autres relations analogues de la forme
$$(S'_p)^\alpha = (S'_q)^\beta \ ?$$

2° $S_n - S_n = a^n$.

3° $$\Sigma' - \Sigma = \frac{a^{n+1}}{(a-1)^2}[2a(a+1)(a^n+1) - n(a-1)(3a+1)].$$

en posant $$\Sigma = S_1S_n + S_2S_{n-1} + \ldots + S_nS_1$$
$$\Sigma' = S'S_n + S_2S'_{n-1} + \ldots + S'_nS'_1.$$

(Davidoglou.)

721. — Montrer que si les trois côtés a, b, c d'un triangle vérifient la relation
$$5(a^2 + b^2 + c^2) = 6(ab + bc + ca)$$

le centre de gravité du triangle est situé sur la circonférence du cercle inscrit.

(E.-N. Barisien.)

722. — 1° Dans le triangle rectangle isoscèle, si le rapport de l'hypoténuse au côté est compris entre

$$\frac{m}{n} \quad \text{et} \quad \frac{p}{q},$$

il est compris entre

$$\frac{p+2q}{p+q} \quad \text{et} \quad \frac{m+2n}{m+n}.$$

2° Dans le triangle équilatéral, si le rapport de la hauteur au côté est compris entre

$$\frac{m}{n} \quad \text{et} \quad \frac{p}{q}.$$

il est compris entre

$$\frac{4m+n}{3m+4n} \quad \text{et} \quad \frac{4p+q}{3p+4q}.$$

(Charles Michel.)

723. — En désignant par h_1, h_2, h_3 les hauteurs relatives aux côtés BC, CA, AB d'un triangle ABC; par r_1, r_2, r_3 les rayons des cercles exinscrits correspondants, on a (notations ordinaires)

$$\left(\frac{r_1}{h_1}\right)^2 + \left(\frac{r_2}{h_2}\right)^2 + \left(\frac{r_3}{h_3}\right)^2 = \frac{8R^2 + r^2 - p^2}{2r^2}.$$

(Davidoglou.)

724. — Dans un triangle isoscèle ABC, on considère le centre O du cercle circonscrit; le centre de gravité G, l'orthocentre H et l'isotomique L de O par rapport à HG. Démontrer que LB — OB = HG. *(Droz-Farny.)*

725. — Les perpendiculaires élevées respectivement aux côtés AB et AC du triangle ABC par les sommets B et C coupent, l'une au point B′, l'autre au point C′, la bissectrice intérieure de l'angle BAC. Démontrer que le cercle tangent en A à AB et passant par B′ et le cercle tangent en A à AC et passant par C′ se coupent sur la médiane issue de A. *(M. d'Ocagne.)*

726. — Soit ABCD un quadrilatère dont les diagonales se coupent en O à angle droit. Les perpendiculaires élevées en A à AB et en C à CD se coupent en H; les perpendiculaires élevées en B à AB et en D à CD se coupent en I. Les symétriques du point H par rapport à A et C sont a et c, du point I par rapport à B et D, b et d. On prend les isotomiques α, β, γ, δ des points C, D, A, B respectivement par rapport aux segments OA, OB, OC, OD. Démontrer que les droites $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, $d\delta$ sont perpendiculaires à la direction commune des droites $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$.

(M. d'Ocagne.)

727. — Soient a, b, c les sommets d'un triangle, O le cercle inscrit à ce triangle et o le centre de ce cercle. On mène à O une tangente quelconque T, elle rencontre la droite oa en un point d'où l'on mène une autre tangente à O. Cette dernière droite rencontre en α le côté du triangle opposé au sommet a; on obtient de même, avec T, les points β et γ sur les deux autres côtés du triangle. Démontrer que les points α, β, γ appartiennent à une droite qui passe par le centre o. *(Mannheim.)*

ERRATUM

Page 67. — Dernière ligne, *au lieu de* « 1881 », *lire* « 1885 ».

— 48. — A la fin du paragrahe 2°, *ajouter* « augmentée du $\frac{1}{9}$ de la somme des carrés des côtés.

RECTIFICATIONS

Les questions **240** et **241** dont les énoncés ont été reproduits p. 46, ont été résolues (*J. E.*, 1888, pp. 50 et 75).

Nous publions dans ce numéro une solution de la question **184**, mais incomplète.

On trouvera aussi une solution des exercices:

391 (1891, p. 280),
418 (1892, p. 258),
420 (1892, p. 260).

Nous reproduirons prochainement d'autres énoncés qui, en très petit nombre d'ailleurs, n'ont pas reçu de solution.

Le Directeur Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 5886-3-96.

MÉTHODES DE DIVISION

EN USAGE A LA FIN DU SIÈCLE DERNIER (*)

(Extrait de *l'Arithmétique en sa perfection*, par F. Le Gendre, arithméticien, Limoges, 1781.)

L'auteur expose trois méthodes de division.

I. *Division à la Française.* — Soit à diviser 13 824 par 32.

On dispose ces nombres de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 3 & 8 & 2 & 4 \\ \hline & 3 & 2 & & \end{array} \quad ($$

le quotient sera placé à l'intérieur du demi-cercle.

Première opération. — On divise 13 par 3, le quotient est 4.

On retranche ensuite de 138, le produit de 32 par 4, en effectuant les opérations *de gauche à droite*. Ainsi on dit :

4 fois 3 font 12, 12 ôtés de 13 reste 1, que l'on écrit au-dessus du 3.

On dit ensuite : 4 fois deux font 8 ; 8 ôtés de 18 reste 10. Le premier dividende partiel est 1 024.

On barre (**) alors tous les chiffres du diviseur et du dividende au fur et à mesure qu'ils sont considérés.

Le résultat de la première opération est le suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 0 & & \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{8} & 2 & 4 \\ \hline & \mathbf{3} & \mathbf{2} & & \end{array} \quad (\ 4$$

Deuxième opération. — On écrit à nouveau le diviseur comme ci-dessous :

$$\begin{array}{ccccc} & 1 & 0 & & \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{8} & 2 & 4 \\ \hline & \mathbf{3} & \mathbf{2} & 2 & \\ & & 3 & & \end{array} \quad (\ 4$$

On applique la règle précédente en écrivant les restes successifs toujours au-dessus du dividende partiel 1 024 et en barrant tous les chiffres qui ont été considérés.

(*) Communiqué par M. Mathieu, professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand.

(**) Les chiffres, ainsi barrés, sont représentés dans cette note par des chiffres *normands*.

On obtient alors le résultat suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & 0 & 6 & \\ 1 & 3 & 8 & 2 & 4 \\ \hline & 3 & 2 & 2 & \\ & & 3 & & \end{array} \quad \Big(\; 4^3$$

Troisième opération. — On écrit encore le diviseur au-dessous du dividende de la même manière que précédemment et le résultat final est alors résumé dans le tableau suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & & \\ & 1 & 0 & 6 & \\ 1 & 3 & 8 & 2 & 4 \\ \hline & 3 & 2 & 2 & 2 \\ & & 3 & 3 & \end{array} \quad \Big(\; 4^{32}$$

II. *Division à l'Espagnole.* — Cette méthode ne diffère de la précédente qu'en ce que les produits du diviseur par les chiffres du quotient s'effectuent en allant de droite à gauche.

Cette seconde méthode est plus simple que la première.

III. *Division à l'Italienne.* — C'est la méthode que nous employons aujourd'hui.

Toutefois, le diviseur était placé comme on voulait. Le quotient était toujours à la droite du dividende.

Exemples :

Diviser	2	9	4	7	9	4	3	1
par			6	3	7.			
Le quotient est		4	6	2	7	8		
et le reste		3	4	5.				

1° *Division à la Française.*

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 3 & & & & \\ & & 1 & & 5 & 4 & & & \\ & & 2 & 5 & 8 & 6 & & & \\ & 3 & 3 & 7 & 0 & 4 & 4 & & \\ & 4 & 9 & 1 & 1 & 9 & 0 & & \\ & 5 & 2 & 9 & 7 & 0 & 4 & 5 & \\ 2 & 9 & 4 & 7 & 9 & 4 & 3 & 1 & \\ \hline & 6 & 3 & 7 & 7 & 7 & 7 & 7 & \\ & & 6 & 3 & 3 & 3 & 3 & & \\ & & & 6 & 6 & 6 & & & \end{array} \quad \Big(\; 4\,6\,2\,7\,8$$

2° *Division à l'Espagnole.*

```
      5 5 3
    1 7 0 4 4
  3 9 9 7 0 4 5
2 9 4 7 9 4 3 1   ( 4 6 2 7 8
-------------
  6 3 7 7 7 7 7
    6 3 3 3 3
      6 6 6
```

3° *Division à l'Italienne.*

```
2 9 4 7 9 4 3 1   ( 4 6 2 7 8
2 5 4 8
  3 9 9 9
6 3 7,  3 8 2 2
    1 7 7 4
    1 2 7 4
      5 0 0 3
      4 4 5 9
        5 4 4 1
        5 0 9 6
          3 4 5
```

MÉTHODE DU COMPLÉMENT (*)

Soit à diviser A par B, le quotient n'ayant qu'un chiffre N. On a :

$$A = B \,.\, N + R$$
$$R \leqslant B - 1.$$

Soit 10^p la puissance de 10 immédiatement supérieure à B et posons :

$$B' = 10^p - B.$$

On aura : $A = (10^p - B') \,.\, N + R$

où $A + B'N = 10^p.N + R.$

Or, on a : $R < 10^p,$

donc N est le premier chiffre du nombre $10^pN + R$.

(*) Cette méthode a été déjà exposée dans ce journal.

Exemple :

$A = 434$, $B = 72$.

$$\begin{array}{r|l} 4\,3\,4 & 7\,2 \\ \cline{2-2} 0\,2 & 6 \end{array}$$

$N = 6 \,||\, R = 02$.

On a : $$B' = 100 - 72 = 28$$

et $$A + B'N = 434 + 28 \times 6$$
$$= 602$$

c'est-à-dire le reste 02 précédé du chiffre du quotient 6.

On voit facilement ce qu'il faut faire quand le quotient a plusieurs chiffres.

Exemple :

MÉTHODE ACTUELLE

$$\begin{array}{r|l} 2\,9\,4\,7\,9\,4\,3\,1 & 6\,3\,7 \\ \cline{2-2} 3\,9\,9\,9 & 4\,6\,2\,7\,8 \\ 1\,7\,7\,4 & \\ 5\,0\,0\,3 & \\ 5\,4\,4\,1 & \\ 3\,4\,5 & \end{array}$$

MÉTHODE DU COMPLÉMENT

$$\begin{array}{r|l} & \qquad\qquad\qquad B' \\ 2\,9\,4\,7\,9\,4\,3\,1 & 6\,3\,7 \quad \overbrace{3\,6\,3} \\ \cline{2-2} 4.3\,9\,9\,9 & 4\,6\,2\,7\,8 \\ 6.1\,7\,7\,4 & \\ 2.5\,0\,0\,3 & \\ 7.5\,4\,4\,1 & \\ 8.3\,4\,5 & \end{array}$$

Les premiers chiffres des restes successifs sont les chiffres du quotient.

Cette méthode du complément est aussi simple que la méthode actuelle et en même temps elle fournit une preuve de l'opération.

Nous terminerons en donnant un dernier exemple où la division se fait exactement :

$$\begin{array}{r|l} 14495.04 & 2876 \quad \overbrace{7124}^{B'} \\ \hline 5.0.11504 & 504 \\ 4.0000 & \end{array}$$

ÉNONCÉS DIVERS

Par M. **E. Lauvernay.**

THÉORÈMES

I. — *On considère les triangles ayant même base* BC *et l'angle* A *opposé déterminé; du centre* O *du cercle circonscrit* ABC, *on mène la perpendiculaire* OP *à la médiane* Aα; *si* I *désigne le milieu de cette médiane, démontrer que le produit* Aα . PI *est constant.*

II. — *La perpendiculaire menée du centre du cercle circonscrit à un triangle* ABC *sur une médiane* Aα *est telle que le carré de la distance de l'un quelconque des points de cette perpendiculaire au sommet* A *est égal à la moyenne arithmétique des carrés des distances de ce même point aux sommets* B, C.

III. — *Le point de concours des symédianes est le pôle, par rapport au cercle circonscrit au triangle, de la droite joignant les points milieux des trois segments déterminés sur chacun des côtés du triangle par les bissectrices de l'angle opposé.*

IV. — *Deux circonférences égales sont telles que l'une passe par le centre de l'autre, d'un point quelconque* B *de l'une de leurs tangentes communes, on mène les secondes tangentes* BA, Bα *rencontrant les tangentes* IA, Cα, *perpendiculaires à la première en* A *et* α, *démontrer :*

1° *Que la droite* Aα *rencontre la seconde tangente commune en un point symétrique de* B *par rapport au milieu de* Oω.

2° *Que* $\frac{1}{\delta\alpha} - \frac{1}{AD} = \frac{1}{R2}$.

V. — *Une circonférence* O *étant inscrite dans un angle* A *donné*

en grandeur et en position, par le milieu α *d'une tangente quelconque* BC, *on mène la parallèle* αED *à* AB *jusqu'à sa rencontre en* D *avec la médiane* Cγ; *si* E *est son point de rencontre avec la parallèle à* AC *menée par le centre* O, *démontrer que le segment* DE *est constant, quelle que soit la tangente* BC.

VI. — *Étant donnés le triangle* ABC *et le cercle inscrit, on joint un point quelconque* D *de la corde des contacts* MM′ (M *et* M′ *étant les points de contact des côtés* CA, CB) *aux sommets* A *et* B ; *ces droites rencontrent respectivement* AC, BC *en* β *et* α; *démontrer que la droite* $\alpha\beta$ *est tangente au cercle inscrit.*

VII. — *Étant donnés un point fixe* O, *une droite fixe* AB, *et une direction* xy *faisant l'angle* φ *avec* AB, *on joint* O *à un point quelconque* A *de* AB *et, par* A, *on mène* AC *telle que* $\widehat{CAB} = \varphi$; *la droite, conjuguée harmonique de* AC *par rapport à l'angle* OAB, *passe par un point fixe.*

VIII. — *Toute tangente à la parabole détermine avec les tangentes, issues du pied de la directrice, un triangle dans lequel la somme algébrique des côtés de l'angle droit est constante.*

PROBLÈMES

I. — *Construire un triangle, connaissant le produit* m^3 *des distances de son orthocentre aux trois sommets, le rayon du cercle circonscrit et une médiane.*

II. — *Etant données deux circonférences* ω, D *dont l'une passe par le centre* D *de l'autre, par l'un des points communs* C *on mène une transversale arbitraire* CAB′ *rencontrant la circonférence* ω *en* A *et la circonférence* D *en* B′, *les droites* DA, D′B′ *se rencontrant en* E. D′ *étant l'une des extrémités du diamètre commun* ωD *dans la circonférence* D, *trouver les lieux des centres des cercles inscrit et circonscrit au triangle* AB′E, *et les lieux du centre de gravité et de l'orthocentre de ce même triangle.*

III. — *Construire un triangle, connaissant l'angle* A, *la somme* 2s *des côtés adjacents et la somme* 2d *des distances du centre du cercle inscrit aux sommets* B *et* C.

IV. — *Construire un triangle, connaissant le côté* BC, *la différance* 2Δ *des angles adjacents à ce côté et la somme* 2d *des distances du centre du cercle inscrit aux sommets* B *et* C.

V. — *Construire un triangle, connaissant la somme des côtés* AB, AC, *la différence* 2Δ *des angles* B, C *et la somme* $2d$ *des distances du centre du cercle inscrit aux sommets* B *et* C.

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

420. — *Une parabole touche les trois côtés d'un triangle respectivement en* A′, B′, C′; *par* A′, *on mène des parallèles aux côtés de l'angle* A, *rencontrant* AC *en* P, AB *en* Q. *Démontrer la relation :*

$$\frac{PC}{QB} = \frac{AB'}{AC'}.$$

Ce rapport est indépendant de la position de la troisième tangente BC.

421. — *La normale en un point quelconque* M *d'une conique à centre coupant les axes de la courbe en* N *et en* N′, *le rapport*

$$\frac{MN}{MN'} = \pm \frac{b^2}{a^2},$$

(a *et* b, *demi-axes*).

Cette propriété est caractéristique des coniques à centre.

422. — *On mène à la courbe :*

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\frac{3}{2}} = 1,$$

une normale en un point quelconque M, *cette normale coupe l'axe des* x *en* N, *celui des* y *en* N′; *de* M, *on abaisse sur les mêmes axes les perpendiculaires* MP, MQ. *Démontrer la relation :*

$$\frac{QN'}{PN} = \frac{a^3}{b^3}.$$

CORRESPONDANCE

M. Lemoine nous adresse la lettre suivante :

« Le précédent article de M. Bernès est fort intéressant et il semble fait à souhait pour éclairer la note de la page 59, laquelle vise les deux côtés de la géométrographie. En effet,

mon article prenait quatre constructions d'un même problème et les exécutait géométrographiquement *telles qu'elles sont énoncées par leurs auteurs*, c'est-à-dire conduisant immédiatement à des procédés graphiques très différents qui donnent lieu à des coefficients de simplicité et d'exactitude et à des tracés différents; c'est tout ce que j'ai fait et c'est un côté de la géométrographie. M. Bernès étudie plus profondément la question, signale avec raison l'oubli, fait par moi, du tracé de la droite AB dans la solution de M. Droz-Farny; puis, il examine les diverses constructions, en montrant, par une étude *géométrique* simple et élégante, que parmi ces constructions il y en a qui, énoncées différemment par leurs auteurs, lesquels les jugeaient différentes et qui l'étaient *de forme* en effet, se confondent; de sorte, par exemple, que, en partant de l'énoncé de la construction donnée par un auteur, on peut arriver à la mienne ou réciproquement et même qu'elles se confondent toutes les quatre, en réalité. Cette étude de l'énoncé d'une construction qui permet d'en déduire un autre énoncé, différent de forme du premier, est précisément l'autre côté de la géométrographie; ce n'est pas le moins intéressant.

» Il n'est pas étonnant, du reste, que les constructions d'un même problème *puissent* se ramener les unes aux autres, la chose même doit toujours pouvoir être, quelque dissemblables qu'elles paraissent, mais le lien qui les unit et en établit l'équivalence n'en est que plus élégant à mettre en relief.

» Il est un point de doctrine sur lequel M. Bernès et moi avons une divergence de vues, divergence qui se manifeste dans la note (**) p. 84, car M. Bernès ne compte que les opérations élémentaires sans distinguer les opérations de préparation, qui, par leur nombre, donnent le coefficient d'exactitude, des opérations du tracé; il indique seulement le moyen de les distinguer *si l'on y tient*; or, le coefficient d'exactitude ayant à mes yeux la même importance, au moins, que celui de simplicité, cette distinction qui n'allonge en rien l'étude géométrographique, me paraît ne devoir jamais être négligée. Il ajoute que sa notation est plus simple que la mienne; j'avoue ne pas être de cet avis, que j'ai longuement discuté dans mes mémoires de l'Association française, Congrès

de Caen 1894 et ailleurs, en me forçant très peu cependant, je concéderai que je n'en ai pas, sauf en ce qui concerne le maintien du symbole C_2 ou d'un équivalent, que je trouve, *spéculativement*, tout à fait différent de C_1, car c'est un point *tout à fait* secondaire. Je n'y vois qu'une différence d'appréciation, qui n'a aucune répercussion sur la géométrographie en elle-même; les deux notations sont fort simples, on peut les apprendre toutes les deux en cinq minutes, chacun choisira donc celle qu'il trouve la plus commode: il est indifférent de boire la liqueur dans une coupe ou dans un calice.

QUESTION DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES

PROPOSÉE AU CONCOURS D'AGRÉGATION DE 1895

Solution par M. Droz-Farny, professeur au lycée de Porrentruy.

On donne un triangle T, *et on considère le triangle* T′, *qui a pour sommets les projections orthogonales* A′, B′, C′ *d'un point* M *sur les côtés du triangle* T.

1° Démontrer que, si le point M *décrit une droite* Δ *dans le plan du triangle* T, *les côtés du triangle* T′ *enveloppent trois paraboles* P, P_1, P_2.

Ces paraboles sont inscrites dans un même angle; on construira leurs foyers et leurs directrices.

Quelle position doit occuper la droite Δ *pour que ces trois paraboles soient tangentes en un même point?*

2° Comment faut-il choisir la droite Δ *pour que les directrices des trois paraboles* P, P_1, P_2 *concourent en un même point* H *à distance finie? La droite* Δ *se déplaçant de manière à satisfaire à cette condition, trouver le lieu du point* H.

3° Démontrer que, si l'on fait tourner la droite Δ *autour d'un point fixe* K, *la directrice de la parabole* P *passe elle-même par un point fixe* J.

Trouver l'enveloppe de la droite KJ *lorsqu'un des points* K *ou* J *décrit une droite donnée.*

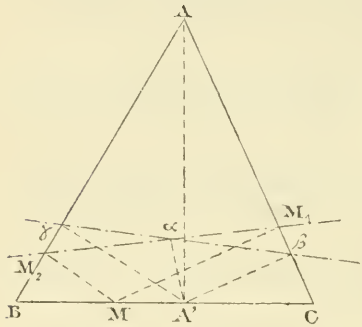
4° A un point K *correspondent trois points* J, J_1, J_2, *relatifs aux directrices des paraboles* P, P_1, P_2.

On demande quelle position doit occuper le point K *pour que les trois points* J, J_1, J_2 *soient en ligne droite, et on propose de démontrer que, si le point* K *se déplace de manière à satisfaire à cette condition, la droite* J, J_1, J_2 *tourne autour d'un point fixe.*

Lemme. — Soient M un point variable quelconque sur la base BC d'un triangle ABC, M_1 et M_2 ses projections sur les côtés AC et AB. Quelle est la courbe enveloppée par la droite M_1M_2?

On constate aisément d'abord que les côtés AB et AC ainsi que les hauteurs AB′ et CC′ sont des positions particulières de M_1M_2. La courbe enveloppée sera une parabole, car les ponctuelles M_1 et M_2 sont semblables à la ponctuelle M.

On peut encore déterminer la nature de la courbe enveloppée de la manière suivante : Le quadrilatère MM_1AM_2 est inscriptible; AM est diamètre de sa circonférence circonscrite qui passe aussi par le pied A′ de la hauteur sur BC. En vertu du théorème de Simpson, les pieds α, β, γ des perpendiculaires abaissées de A′ sur les côtés M_1M_2, M_1A, M_2A du triangle M_1AM_2 sont en ligne droite. Or, β et γ sont des points fixes et, par conséquent, la droite variable M_1M_2 se meut de manière que le sommet α de l'angle droit $M_1\alpha A'$ reste constamment sur βγ et que le côté A′α passe par le point fixe A′.



La courbe est donc une parabole tangente aux côtés AC et AB aux hauteurs BB′ et CC′, de foyer A′, ayant βγ comme tangente au sommet et B′C′ comme directrice, B′ et C′ étant les points d'intersection de tangentes orthogonales à la parabole.

1° La droite Δ coupe les côtés du triangle ABC en $A_1B_1C_1$ et la circonférence circonscrite en G_1 et G_2. D'après le lemme précédent, le côté B′C′ du triangle T′ enveloppe une

parabole P ayant pour foyer le pied de la hauteur abaissée de A sur Δ et pour directrice la droite qui joint les pieds des deux autres hauteurs du triangle AB_1C_1; P est tangente à ces deux hauteurs, ainsi qu'aux côtés AB_1 et AC_1 du triangle T.

On trouve des résultats analogues pour les paraboles enveloppées par les côtés $A'B'$ et $A'C'$ de T'.

Pour les positions G_1 et G_2 du point M, d'après le théorème de Simpson, le triangle T' se réduit à une ligne droite et, par conséquent, les trois paraboles admettent comme tangentes communes les droites de Simpson Γ_1 et Γ_2 des points G_1 et G_2 par rapport au triangle T.

Lorsque les droites Γ_1 et Γ_2 se rapprochent indéfiniment, ce qui a lieu lorsque Δ est tangente en un point L de la circonférence circonscrite, les trois paraboles toucheront la droite de Simpson L au point l où cette dernière touche l'hypocycloïde de Steiner. On en déduit le *théorème* :

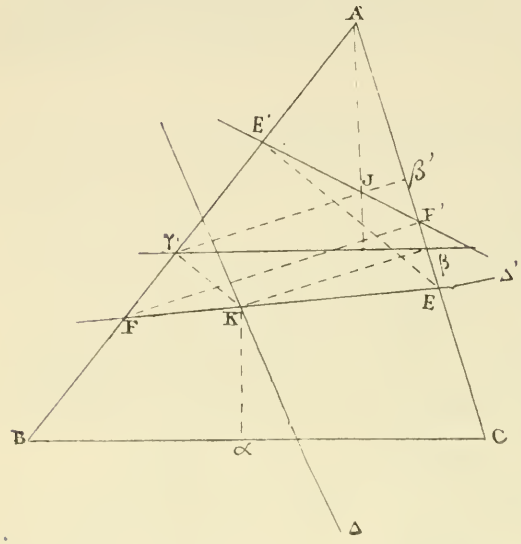
Lorsque la droite Δ est tangente à la circonférence circonscrite, les trois paraboles P, P_1 et P_2 sont tangentes en un même point l. Lorsque Δ se meut en restant tangente à la circonférence circonscrite, le point l décrit l'*hypocycloïde de Steiner* du triangle T et les foyers de chaque groupe de paraboles décrivent des *cardioïdes* ayant respectivement A, B et C comme points de rebroussement.

2° Si les tangentes Γ_1, Γ_2 communes aux trois paraboles étaient orthogonales, ce qui a lieu lorsque G_1G_2 est un diamètre de la circonférence circonscrite au triangle, leur point d'intersection H appartiendrait aux trois directrices.

C'est un théorème bien connu, dû à M. E. Lemoine, que H décrit le cercle des neuf points de T lorsque G_1G_2 tourne autour du centre du cercle circonscrit.

3° Représentons par α, β, γ les projections du point K sur les côtés du triangle T; K étant sur Δ une position particulière de M, la droite $\beta\gamma$ est tangente à la parabole P; si donc Δ tourne autour de K, les paraboles P corespondantes sont inscrites au triangle $A\beta\gamma$, leurs directrices passent par l'orthocentre J de ce triangle.

Si K se meut sur une droite Δ', d'après le lemme, $\beta\gamma$ enveloppe une parabole π et le lieu de J est une droite, la directrice de π. Si Δ' coupe les côtés AB et AC en F et E, cette directrice sera aussi la droite qui joint les pieds E', F' des hauteurs EE', FF' du triangle AEF. Si E'F' est donnée, cette dernière propriété permet de construire la droite Δ' lieu de K.



Les droites $K\beta$ et βJ restant, pendant le mouvement de K, constamment parallèles à elles-mêmes, K et J enveloppent des ponctuelles semblables; donc KJ enveloppe une parabole tangente à Δ' et à E'F'.

4° On sait que les orthocentres des quatre triangles que déterminent, pris trois à trois, les côtés d'un quadrilatère sont en ligne droite.

Si donc le triangle $\alpha\beta\gamma$ se réduit à une ligne droite (ce qui aura lieu lorsque K tombe sur la circonférence circonscrite à T) $JJ_1 J_2$ et l'orthocentre de ABC seront en ligne droite. Ce dernier point reste fixe, si K décrit la circonférence circonscrite.

BIBLIOGRAPHIE

Leçons de Géométrie, rédigées suivant les derniers programmes officiels et accompagnées, pour chaque leçon, d'exercices et de problèmes gradués, par Eugène Rouché, examinateur de sortie à l'Ecole Polytechnique, professeur au Conservatoire des Arts et Métiers, et Ch. de Comberousse, professeur à l'Ecole Centrale et au Conservatoire des Arts

et Métiers; quatre volumes petit in-8° se vendant séparément. — Première partie : *La ligne droite et la circonférence de cercle*, à l'usage des élèves de la classe de quatrième (moderne), avec 137 figures; 1896. broché, 2 fr. 75; cartonné, 3 fr. 25 c.; II°, III° et IV° parties (sous presse), — *Solutions des exercices et problèmes proposés dans les Leçons de Géométrie*, I°° partie; volume petit in-8°, avec figures, 2 fr. 75 c.; II°, III° et IV° parties (sous presse).

Le volume que nous signalons à l'attention de nos collègues de l'enseignement moderne n'a pas besoin, pour leur être présenté, de notre recommandation. Il nous suffira de leur dire qu'il correspond, abstraction faite de l'appendice (*), aux deux premiers livres d'une géométrie, depuis longtemps classique. Il me semble que MM. Rouché et de Comberousse ne pouvaient mieux faire, même en s'adressant à l'enseignement moderne, que de conserver la rédaction, vraiment parfaite, de l'ouvrage que je viens de rappeler et que j'ai voulu revoir pour le comparer au traité qu'ils viennent d'écrire pour satisfaire aux besoins de l'enseignement nouveau. En comparant les deux livres, on observera que, abstraction faite de certains développements touchant à des théories plus délicates et qui ne sont visiblement pas à leur place dans l'enseignement moderne, MM. Rouché et de Comberousse ont pensé, — je suis d'ailleurs, je le répète, complètement de leur avis, — qu'il n'était pas nécessaire d'exprimer, pour deux publics différents, les mêmes vérités dans deux formes distinctes; une suffit, pourvu qu'elle soit bonne. Mais ils ont détaché de ce que l'on peut appeler l'ouvrage fondamental une portion déterminée, s'adaptant au programme de la quatrième moderne, en la débarrassant des parties qui ne conviennent pas aux débutants de cet enseignement; ils ont fait ainsi un livre qui deviendra rapidement classique, même dans la quatrième moderne.

Les parties 2, 3, 4 paraîtront successivement; c'est surtout dans ces volumes, je le suppose, que doit s'accentuer la différence entre les deux enseignements, différence qui consiste, je crois, principalement dans l'extension plus ou moins grande que l'on donne aux théories exposées.

L'ouvrage dont je viens de parler m'a fait relire, une fois de plus, et je ne m'en plains pas, les définitions de la géométrie. Je me demandais, non sans quelque curiosité, comment, dans cet enseignement moderne, étaient présentées les premières notions. On aime à s'instruire à tout âge; on aime surtout à relire!

Mais j'ai vu que MM. Rouché et de Comberousse avaient purement et simplement reproduit les définitions qu'ils ont adoptées dans l'ouvrage fondamental, comme je l'ai appelé plus haut. Ils y ont seulement ajouté, pour mieux faire pénétrer les *idées premières* dans l'esprit des néophytes de l'enseignement moderne, l'image d'un dé à jouer — avec ses *six* faces, ses *douze* lignes et ses *huit* points. — Pourtant, avec ou sans dé, que ces définitions premières sont donc discutables! Qu'est-ce que la *limite* (**) qui sépare un volume de l'espace environnant et comment concevoir cette limite? Puisqu'il faut faire appel à des idées premières, quelles sont donc celles qui conviennent le mieux à l'esprit de celui qui débute dans l'étude de la géométrie? Par exemple, quand on définit le point comme étant les *extrémités* d'une portion de ligne, ne recule-t-on pas la définition cherchée en lui substituant celle du mot *extrémité*, tout

---

(*) Je veux parler de l'appendice de la page 93 (6° édition).

(**) Briot disait *limite* ou *enveloppe*. Ce n'est pas plus clair. Bobillier (*Cours de Géométrie*, 1870, p. 2) disait le *lieu*, il ajoutait *enveloppe idéale*; autant de mots qui couvrent, sans l'éclaircir, une difficulté qu'il est peut-être préférable de montrer tout d'abord.

aussi difficile à faire comprendre? Il y a là, sans doute, sujet à de longues discussions philosophico-mathématiques. Mais le mieux ne serait-il pas de déclarer franchement que certaines choses sont et resteront indéfinissables?

Lionnet, on le sait, ne définissait pas la ligne droite. Catalan acceptait cette façon d'aborder la géométrie: il a aussi proposé une définition (voyez la Préface de la 1re édition de sa *Géométrie*, 1843, reproduite dans la 2e édition, 1866), exigeant la notion préalable du plan; mais on ne saisit pas bien le rapprochement qu'il fait de cette définition avec celle d'Euclide, définition d'ailleurs peu nette, du moins telle qu'elle est traduite dans Peyrard, « *la ligne droite est celle qui est également placée aux points qui sont en elle* ». On peut, dans tous les cas, désirer une définition plus claire, si l'on veut en donner une (*). *G. L.*

BACCALAURÉATS

BACCALAURÉAT CLASSIQUE *(LETTRES-MATHÉMATIQUES)* (21 mars 1896).

Académie de Paris.

1° *Problème obligatoire :*

Étudier et représenter graphiquement la variation de la fraction

$$y = \frac{3x^2 + 7x + 4}{2x^2 - 5x - 7}$$

lorsque x prend toutes les valeurs possibles.

2° *Trois questions à choisir :*

1° Définition et détermination de la latitude d'un lieu à la surface de la terre.

2° Inégalité des jours et des nuits.

3° Inégalité des saisons.

Académie de Montpellier.

Déterminer les angles x, y, vérifiant les relations

$$\operatorname{tg} x = a \operatorname{cotg} y. \qquad \operatorname{tg} 2x = b \operatorname{cotg} y.$$

Résoudre $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = a$, $\cos x + \cos y = b$.

Académie de Nancy.

Baccalauréat complet.

1° Résolution de deux équations du premier degré à deux inconnues. — Discussion.

(*) J'ai lu, il y a quelques années, dans une revue philosophique, un article de M. Renouvier, sur ce sujet, article que je cite de mémoire, n'ayant pu le retrouver. Je ne crois pourtant pas me tromper en affirmant que la définition de la ligne droite, d'après la traduction Peyrard, était celle-ci : *une ligne droite est telle que deux points de cette ligne* OMBRAGENT *un troisième point quelconque.* Mais le mot *ombrager*, ici employé, n'a de sens que si l'on a la notion exacte de la perspective, c'est-à-dire la notion de ligne droite. Et l'on tourne toujours dans un cercle vicieux.

2° *Problème.* — Une couche sphérique (solide compris entre deux sphères concentriques) a une épaisseur égale à a et un volume égal à celui d'une sphère de rayon b. Calculer le rayon intérieur et le rayon extérieur.

Baccalauréat classique.

I. *Questions au choix :* 1° Démontrer que lorsqu'une droite est perpendiculaire à un plan, toute parallèle à cette droite est perpendiculaire au même plan, et que, réciproquement, deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles entre elles.

2° Démontrer que dans tout angle trièdre, une face quelconque est plus petite que la somme des deux autres.

3° Démontrer que la somme des faces d'un angle polyèdre convexe est moindre que quatre angles droits.

II. *Problème.* — On donne l'équation

$$\sin^2 x - 2(m - 7) \sin x - 3 = 0.$$

1° Indiquer, pour chaque valeur de la constante m, quelles sont les racines acceptables comme valeurs de $\sin x$.

2° Former et résoudre l'équation qui fait connaître $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

Académie de Toulouse.

Baccalauréat complet.

I. Énoncer et démontrer la relation qui existe entre la longueur d'une médiane et les trois côtés d'un triangle.

Application : Étant donné un carré ABCD, trouver le lieu géométrique des points M de son plan, tels que la somme des carrés de leurs distances aux quatre sommets soit égale à une quantité constante K^2.

II. *Problème.* — Trouver les valeurs de x comprises entre 0 et 2π qui rendent positive la quantité

$$\sin 3x - \sin 2x + \sin x.$$

Baccalauréat classique.

1° Démontrer que le produit de cinq nombres entiers consécutifs est toujours un multiple de 120.

2° Ox et Oy étant deux droites rectangulaires, on prend sur Oy une longueur $OC = h$. Le point C est le centre d'un cercle de rayon r. On prend sur Ox à droite du point O une longueur $OA = a$. Trouver sur Ox et *à droite du point* A un point M, tel que la longueur de la tangente menée de ce point au cercle soit égale à m fois la longueur AM. — Discussion.

Académie de Rennes.

I. *Questions au choix :* 1° Résoudre un triangle connaissant les trois côtés. Conditions pour que le problème soit possible.

2° Des équations $$A + B + C = 180^\circ$$

et $$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

déduire la relation entre les trois côtés a, b, c du triangle et l'angle A.

3° Connaissant $\operatorname{tg} x$, calculer $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$, $\cos 2x$. Expliquer *à priori* pourquoi ces problèmes admettent, les uns une seule solution, les autres deux.

II. *Problème.* — En nommant s et p, la somme et le produit des racines de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$, s' et p' les mêmes choses pour l'équation $a'x^2 + b'x + c' = 0$, S et P les mêmes choses pour l'équation $(a + \lambda a')x^2 + (b + \lambda b')x + (c + \lambda c') = 0$ ou λ est un facteur inconnu; déterminer ce facteur par la condition que $P = p + p'$ et exprimer S en fonction de s, s', p, p'.

Académie de Poitiers.

Baccalauréat complet.

I. Volume engendré par un triangle tournant autour d'un axe mené dans son plan par un de ses sommets. Examiner les diverses positions du triangle par rapport à l'axe.

II. *Problème.* — Les deux cordons qui soutiennent une poulie mobile en équilibre, sous l'action d'une puissance et d'une résistance, font entre eux un angle de 60°. Quel est à ce moment le rapport de la puissance à la résistance?

Baccalauréat classique.

I. *Questions au choix :* 1° Mesure du temps. Jour solaire vrai. Jour solaire moyen.

2° Lois de Képler. Inégalité des saisons.

3° Détermination de la longitude et de la latitude.

II. Le même problème que pour le baccalauréat complet.

QUESTION 119 (1883)

Solution, par M. L. Goyens.

On donne le triangle ABC *et le rayon* r *du cercle inscrit. Soient* A′, B′, C′, *les points de contact du cercle inscrit avec les côtés du triangle* (A′ *sur* BC, *etc.*) *On pose* $AC' = \alpha$, $BA' = \beta$, $CB' = \gamma$. *Par le point* L *pris sur le cercle inscrit, on mène une tangente* $A_1B_1C_1$ *(le point* A_1 *étant sur* BC, *etc.) On pose* $LA_1 = x$, $LB_1 = y$, $LC_1 = z$;

Quelle relation y a-t-il : 1° entre x *et* y; *2° entre* x *et* z; *3° entre* y *et* z; *4° entre* x, y, r. *En conclure la formule* $S = \frac{\alpha\beta\gamma}{r}$, S *désignant la surface du triangle* ABC.

Appelons A_1 l'angle BA_1B_1; B_1 l'angle A_1B_1A; C_1 l'angle A_1C_1B.

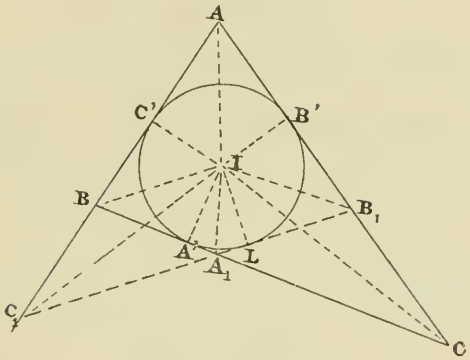
On a :
$$A_1 + B_1 = 180° + C,$$
$$A_1 - C_1 = 180° - B,$$
$$B_1 + C_1 = 180° - A,$$

d'où

$$(1)\qquad \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}A_1 + \operatorname{tg}\frac{1}{2}B_1}{1 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}A_1 \operatorname{tg}\frac{1}{2}B_1} = -\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C,$$

$$(2)\qquad \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}A_1 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}C_1}{1 + \operatorname{tg}\frac{1}{2}A_1, \operatorname{tg}\frac{1}{2}C_1} = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}B,$$

$$(3)\qquad \frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}B_1 + \operatorname{tg}\frac{1}{2}C_1}{1 - \operatorname{tg}\frac{1}{2}B_1, \operatorname{tg}\frac{1}{2}C_1} = \operatorname{cotg}\frac{1}{2}A,$$



on a aussi :

$$(4)\qquad x = r\operatorname{cotg}\frac{1}{2}A_1, \qquad \alpha = r\operatorname{cotg}\frac{1}{2}A, \qquad (7)$$

$$(5)\qquad y = r\operatorname{cotg}\frac{1}{2}B_1, \qquad \beta = r\operatorname{cotg}\frac{1}{2}B, \qquad (8)$$

$$(6)\qquad z = r\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C_1, \qquad \gamma = r\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C. \qquad (9)$$

Au moyen de (4), (5), (6), (7), (8), (9), les égalités (1), (2), (3) deviennent :

$$(10)\qquad \frac{\frac{r}{x} + \frac{r}{y}}{1 - \frac{r^2}{xy}} = -\frac{\gamma}{r} \quad \text{ou} \quad r^2(x+y) + \gamma xy - r^2\gamma = 0,$$

$$(11)\quad \frac{\frac{r}{x}-\frac{r}{z}}{1+\frac{r^2}{xz}}=\frac{\beta}{r}\qquad \text{ou}\quad r^2(z-x)-\beta zx-r^2\beta=0,$$

$$(12)\quad \frac{\frac{r}{y}+\frac{r}{z}}{1-\frac{r^2}{yz}}=\frac{\alpha}{r}\qquad \text{ou}\quad r^2(z+y)-\alpha yz+r^2\alpha=0.$$

(10) + (11) − (12) donnent :

$$(13)\quad \gamma xy-\beta zx+\alpha yz=r^2(\alpha+\beta+\gamma)=r^2p=r\mathrm{S}.$$

Portons dans (13) les valeurs de xy, zx, yz, tirées de (10), (11) et (12), on trouve :

$$(14)\qquad \mathrm{S}=\frac{r^2(\alpha+\beta+\gamma)}{r}=r(\alpha+\beta+\gamma).$$

Mais $\alpha+\beta+\gamma=r(\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\mathrm{A}+\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\mathrm{B}+\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\mathrm{C})=$

$$=r\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\mathrm{A}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\mathrm{B}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}\mathrm{C}=r\frac{\alpha}{r}\cdot\frac{\beta}{r}\cdot\frac{\gamma}{r}=\frac{\alpha\beta\gamma}{r};$$

donc (14) donne :

$$\mathrm{S}=r(\alpha+\beta+\gamma)=r\cdot\frac{\alpha\beta\gamma}{r^2}=\frac{\alpha\beta\gamma}{r}.$$

Nota. — Nous avons reçu une solution analogue de M. V. Cristescu, ingénieur à Bucarest.

QUESTION 199

Solution, par M. A. Boutin.

On donne deux droites rectangulaires Ox, Oy *et deux droites* Δ, Δ′ *parallèles à* Ox. *Par* O, *on mène une transversale mobile* Δ″ *qui rencontre* Δ *en* A, Δ′ *en* A′; *enfin, au point* A′ *on élève une perpendiculaire* A′I = AA′.

Cela posé, on demande de déterminer la droite Δ″ *de façon que le rectangle* λ, *obtenu en abaissant de* I *des perpendiculaires sur* Ox *et* Oy, *soit maximum.*

On suppose ensuite que les droites Δ, Δ′ *se meuvent parallèlement à elles-mêmes en conservant une distance invariable; à chaque position de ces droites correspond un point* I *déterminé comme on vient de le voir. Trouver pour quelle position des parallèles le rectangle* λ, *correspondant à ce point, est minimum.* (G. L.)

Soient b la distance de Ox à Δ' et a la distance de Δ à Δ', α l'angle de Δ'' avec Ox; I étant situé dans l'angle de Δ'' et du prolongement de Oy; soient enfin x et y les distances de I à Ox et à Oy.

On a $x = OA' \cos\alpha + AA' \sin\alpha = b \operatorname{cotg}\alpha + a$

$y = OA' \sin\alpha - AA' \cos\alpha = b - a \operatorname{cotg}\alpha$;

le produit xy est maximum, en même temps que $ax.by$, produit dont la somme des facteurs est constante; le maximum a donc lieu pour

$$ax = by$$

ou

$$\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b^2 - a^2}{2ab}$$

ce qui donne pour le maximum :

$$xy = \frac{(b^2 + a^2)^2}{4ab}$$

expression dont il faut trouver le minimum quand a restant fixe, b varie.

Cette expression est minimum en même temps que $\dfrac{(b^2 + a^2)^2}{b}$

ou que la racine carrée de cette quantité $b\sqrt{b} + \dfrac{a^2}{\sqrt{b}}$.

On remarque que $b\sqrt{b} \times \left(\dfrac{a^2}{\sqrt{b}}\right)^3 = a^6 = \text{constante}$; le minimum a donc lieu pour :

$$b\sqrt{b} = \frac{a^2}{3\sqrt{b}}$$

$$b = \frac{a}{\sqrt{3}}.$$

Le minimum de λ est alors $\dfrac{4a^2}{3\sqrt{3}}$.

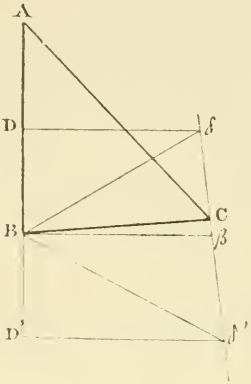
QUESTION 661

Solution par M. H. L'Huillier.

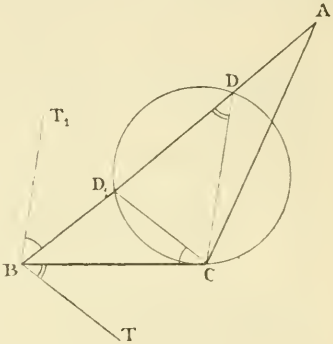
Étant donné un triangle ABC : *1° Si sur* AB, *à partir de* B, *on porte dans les deux sens une même longueur arbitraire* l *en* BD, BD', *les tangentes en* B *aux deux cercles* BCD, BCD' *sont conjuguées harmoniques relativement à* BA, BC; *2° Si l'on porte, dans un même sens, deux longueurs* BD, BD_1,

ayant a *pour moyenne proportionnelle, les tangentes en* B *aux deux cercles* BCD, BCD_1 *sont isogonales relativement à l'angle* B. *Cas particulier où* BD = c. (Bernès.)

1° Élevons à AB, en D et D′, des perpendiculaires jusqu'à leurs rencontres en δ, δ' avec la perpendiculaire en C à BC. Nous avons en $B\delta$, $B\delta'$ les diamètres des deux cercles BDC, BD′C; ils forment évidemment, avec les perpendiculaires en B à AB et BC, un faisceau harmonique (puisque la perpendiculaire BS à AB



passe par le milieu de $\delta\delta'$) donc les quatre droites perpendiculaires, c'est-à-dire les tangentes aux cercles BCD, BCD′ et les droites BA, BC, forment aussi un faisceau harmonique.



2° La tangente BT au cercle BDC fait avec la droite BC l'angle CBT égal a l'angle CDB. De même BT_1 étant la tangente au cercle BD_1C, on a $\widehat{T_1BA} = \widehat{BCD_1}$. D'ailleurs, $BD \cdot BD_1 = \overline{BC}^2$; par suite, les droites DC, D_1C sont antiparallèles dans l'angle B et les angles D_1CB et BDC sont égaux. Donc les droites BT, BT_1 sont isogonales relativement à l'angle B.

Si BD = c, BT_1 est parallèle à AC; de plus, BT est la tangente au cercle circonscrit.

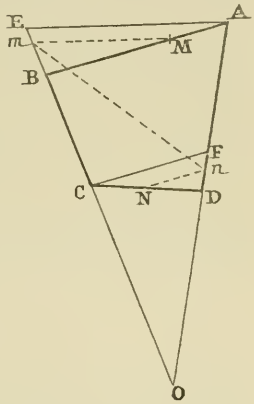
QUESTION 359

Solution, par M. H. L'Huillier.

Si les droites AE, CF *menées des extrémités d'une diagonale* AC *du quadrilatère* ABCD, *parallèlement à deux côtés opposés, coupent*

les deux autres côtés aux points E, F, *la droite* EF *est parallèle à l'autre diagonale* BD.

Déduire de cette propriété, que si M, N, *divisent* AB, CD *dans un même rapport, la somme des aires* ANB, CMD *est égale à l'aire* ABCD. (J. Neuberg. *Mathesis*, 1882, p. 158, et 1883, p. 140). (B. Sollertinsky.)



On a

$$\frac{OE}{OC} = \frac{OA}{OD} \quad \text{et} \quad \frac{OB}{OC} = \frac{OA}{OF},$$

d'où

$$\frac{OE}{OB} = \frac{OF}{OD},$$

ce qui montre que EF est parallèle à BD.

Soient MN tels que $\frac{AM}{MB} = \frac{CN}{ND}$.

Menant Mm, Nn respectivement parallèles à CD, AB, on a $\frac{Em}{mB} = \frac{Fn}{nD}$;

donc mn est parallèle à BD et EF. On a :

MCD équivalent à mCD = BCD + mBD;

NBA — nBA = DBA − nBD.

Or, mBD et nBD sont équivalents, donc ABCD équivalent à MCD + NBA.

QUESTION 668

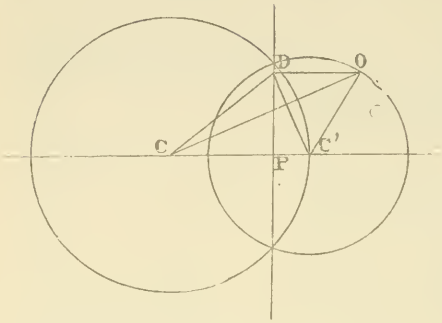
Solution par M. Jean Negretzu, Bergakademiker (Freiberg i. S.).

On donne sur un plan une circonférence C *et un point* O. *D'un point de cette courbe, comme centre, on décrit une circonférence de cercle qui passe par* O *et l'on prend l'axe radical de cette courbe et de* C. *Démontrer que, lorsque le centre pris sur* C *se déplace sur cette courbe, cet axe radical reste tangent à une circonférence de cercle.* (Mannheim.)

Soit D la projection du point O sur l'axe radical. La figure CDOC′ étant un trapèze, on a (*J. E.*, 1894, p. 101.)

(1) $(\overline{CO}^2 + \overline{DC'}^2) - (\overline{CD}^2 + \overline{C'O}^2) = 2CC'.DO$;

d'ailleurs, le point D étant sur l'axe radical, on a la relation



$$\overline{DC}^2-\overline{CC'}^2=\overline{DC'}^2-\overline{C'O}^2,$$

ou

$$\overline{DC}^2+\overline{C'O}^2=\overline{DC'}^2+\overline{CC'}^2;$$

la relation (1) devient donc

$$\overline{OC}^2-\overline{CC'}^2=2CC'.DO$$

d'où

$$DO=\frac{\overline{CO}^2-\overline{CC'}^2}{2CC'}=\text{const.}$$

Ainsi, le lieu des points tels que D est une circonférence, dont le centre est le point fixe O et dont le rayon est égal à

$$\frac{\overline{CO}^2-\overline{CC'}^2}{2CC'}.$$

Solution par l'auteur de la question. — Soient c le centre de la circonférence qui passe par O et R l'axe radical de cette courbe et de C. Lorsque c se déplace sur C, la droite R a une enveloppe : quel est le point où R touche cette courbe? Prenons sur C le point c_1 infiniment voisin de c et décrivons, de ce point comme centre, une circonférence passant par O. L'axe radical de cette courbe et de C coupe R au point de contact p demandé. Ce point est le centre radical des trois circonférences : C et les deux circonférences infiniment voisines. Il appartient donc à l'axe radical de ces deux dernières courbes. Cette droite passe par O et elle est perpendiculaire à la ligne des centres de ces deux circonférences, c'est-à-dire à la tangente en c à C où encore elle est perpendiculaire à R, qui est parallèle à cette droite. Ainsi Op est perpendiculaire à R et, par suite, la normale en p passe par O. La courbe enveloppe de R est donc telle que toute ses normales passent par un même point; c'est donc une circonférence de cercle, dont le centre est O.

Autrement. Prenant le point O pour pôle et transformant par rayons vecteurs réciproques l'énoncé de la question proposée, on obtient :

On donne sur un plan une circonférence C′ *et un point* O. *Sur le milieu du segment* Oc′, *qui aboutit à un point de* C′, *on élève une perpendiculaire à ce segment. Cette droite coupe* C′ *aux points* l *et* m *: la circonférence qui passe par* O, l, m, *est toujours tangente à une circonférence de cercle, quelle que soit la position de* c′ *sur* C′. Cette propriété est pour ainsi dire évidente, puisque les triangles *Olm*, *lc′m* étant égaux, les cercles qui leur sont respectivement circonscrits ont des diamètres égaux. Les cercles circonscrits aux triangles tels que *lOm* sont donc tangents à un cercle de centre O et dont le rayon est égal au diamètre de C′. Revenons à la question 668 et appelons *a* et *b* les points de rencontre de C et du diamètre qui passe par O ; il résulte de ce que nous venons de trouver que *l'inverse du rayon du cercle auquel les droites* R *sont tangentes est égal à* $\frac{1}{Oa} \pm \frac{1}{Ob}$. *On doit prendre le signe + ou le signe — selon que* O *est à l'intérieur ou à l'extérieur de* C.

Nota. — Solutions diverses par MM. E. Foucart, H. L'Huillier, Droz-Farny.

QUESTIONS PROPOSÉES

728. — Étant donnés trois nombres positifs x, y, z tels que

$$x + y + z = 1$$

on a

1° $$x^2(1 - x) + y^2(1 - y) + z^2(1 - z) > 6(1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z);$$

2° $$\frac{(1 - x)(1 - y)(1 - z)}{(1 - 2x)(1 - 2y)(1 - 2z)} > 8;$$

3° $$xyz < \frac{1}{24}.$$

(J.-F. d'Avillez.)

729. — Soient ABC un triangle formé par trois tangentes à une parabole, M, N, P les point de contact :

1° Par les sommets du triangle et par un point déterminé D de la directrice, on peut faire passer une infinité d'hyperboles équilatères ;

2° Si les normales à la parabole aux points M, N, P ne

concourent pas en un même point, il y a une infinité d'hyperboles équilatères qui passent par les sommets du triangle formé par les normales, et par un point D′ du diamètre de la parabole qui passe par D. *(J.-F. d'Avillez.)*

NOTE

D'après les recherches que j'ai faites et auxquelles se sont obligeamment associés MM. Brocard et Laisant, des questions proposées dans le *Journal de Mathématiques élémentaires*, sous les nos 1 à 420 (*); les seules qui ne soient pas résolues sont celles qui correspondent aux numéros suivants :

119, 148, 149, 160, 184, 199, 229,
279, 284, 345, 359, 360, 393, 394.

Nous avons reproduit (numéros de janvier et février, p. 23, 45) les énoncés des questions

7, 23, 119, **148**, **149**, 199,
240, 241, **284**, 359, **360**, 391, 418, 420.

Les questions 7, 184 ont été résolues depuis (p. 68; p. 87).

La question 23 a été résolue (1883, p. 255). Mais, par suite d'une faute typographique, elle figure *(loc. cit.)* sous le n° 33.

Les questions suivantes ont reçu leur solution :

184 . . . . . (1896, p. 87),
418 . . . . . (1892, p. 258),
420 . . . . . (1892, p. 260),
391 . . . . . (1891, p. 280),
240 et 241 . . . . . (1888, p. 49).

119, 199 et 359 sont résolues dans le présent numéro.

Il reste donc à publier de nouveau (**), dans l'espérance de provoquer ainsi les solutions qu'ils comportent, les énoncés des questions :

160, 229, 279, 345, 393, 394,

questions qui, avec celles qui ont été proposées sous les numéros :

148, 149, 284, 360;

soit dix questions, au total, sont (entre 1 et 420) les seules, si nous ne faisons pas erreur, qui ne soient pas encore résolues (***).

Mais, au préalable, cette note peut donner lieu à des rectifications que nous recevrons avec reconnaissance.

RECTIFICATIONS

P. 13, ligne 11, *au lieu de* le produit des diamètres, *lisez* le double produit des rayons.

P. 70, question 703, *au lieu de* hauteur, *lisez* médiane;

P. 71, question 713, *au lieu de* b_1, b_2, b_3 les bissectrices, *lire* les segments non consécutifs déterminés sur les côtés par les bissectrices.

(*) Par oubli, il n'y a pas eu de question numérotée 121.
(**) Nous le ferons prochainement.
(***) Nous avons reçu dernièrement une solution des questions 148, 149.

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 8190-4-96.

SUR UNE INÉGALITÉ

Par M. **Alfredo Schiappa Monteiro**, colonel d'artillerie, membre de l'Académie de Lisbonne.

Nous nous proposons d'établir le théorème suivant :

Étant donnés n *nombres positifs* $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, *si l'on considère les* n *sommes, déterminées par ces nombres, groupés* $n-1$ *à* $n-1$, *on a :*

(1) $$(x_2 + x_3 + \ldots x_{n-1} + x_n)(x_1 + x_3 + \ldots + x_n) \ldots (x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1}) > [n-1]^n x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n-1} x_n.$$

Par un théorème connu (*), on peut écrire

$$\frac{x_2 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n}{n-1} > \sqrt[n-1]{x_2 x_3 \ldots x_{n-1} x_n},$$

$$\frac{x_1 + x_3 + \ldots + x_{n-1} + x_n}{n-1} > \sqrt[n-1]{x_1 x_3 \ldots x_{n-1} x_n},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_{n-1} + x_n}{n-1} > \sqrt[n-1]{x_1 x_2 \ldots x_{n-1}},$$

En multipliant, membre à membre, ces n inégalités, on a :

$$\frac{(x_2+x_3+\ldots+x_{n-1}+x_n)(x_1+x_3+\ldots+x_{n-1}+x_n)\ldots(x_1+x_2+\ldots+x_{n-1})}{[n-1]^n} > x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n-1} x_n;$$

c'est l'inégalité que nous voulions signaler.

Remarque. — Si l'on désigne par k la somme des n nombres positifs considérés, l'inégalité devient

(2) $$(k-x_1)(k-x_2)(k-x_3)\ldots(k-x_n) > [n-1]^n x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n-1} x_n$$

En particulier, si l'on suppose $k = 1$, $n = 3$, on a

(3) $$(1 - x_1)(1 - x_2)(1 - x_3) > 2^3 x_1 x_2 x_3.$$

On retrouve ainsi la question proposée sous le n° 1554 par M. Wolstenholme (*Nouvelles Annales de mathématiques*, 1885, p. 535).

(*) C'est le théorème de Cauchy (de Longchamps, *Algèbre*, p. 208). On peut consulter, à ce propos, le *Cours d'Analyse* de Cauchy, 1821, p. 457 ; la *Correspondance mathématique* de Quetelet, 1828, t. IV, p. 169, et les *Nouvelles Annales*, 1842, p. 368.

SUR UNE NOUVELLE DÉFINITION
DES PERPENDICULAIRES

Par M. **A. Poulain**, à Angers.

La définition des perpendiculaires, telle qu'elle se trouve exposée au début de tous les traités de géométrie, a l'inconvénient de renfermer des subtilités qui embarrassent les commençants, et cela à un moment où ils se découragent facilement. Il faut leur répéter maintes fois qu'on ne doit pas définir la perpendiculaire au moyen de l'angle droit, mais faire l'inverse. Ils ont aussi de la peine à comprendre qu'en vertu de la définition, on est obligé de prouver que *si une droite est perpendiculaire à une autre, réciproquement celle-ci est perpendiculaire à la première.* De plus, la mesure en degrés et la connaissance du rapporteur sont retardées jusqu'au second livre. De la sorte, on prend pour mesurer les angles une unité toute provisoire, l'angle droit, qu'on abandonne ensuite; et les traités théoriques ne débutent pas comme les traités pratiques, ce qui est à éviter dans la mesure du possible.

Voici une nouvelle définition qui me semble plus avantageuse. Elle découle d'une étude préliminaire sur les angles.

1. Définition. — Nous dirons qu'une droite AB a exécuté *un tour* complet autour d'une de ses extrémités A, dans son plan, lorsqu'elle est revenue à sa position primitive.

2. Théorème. — *La somme d'angles ainsi engendrée est invariable* (*).

En un mot, la somme que décrit A'B' autour de A' égale celle que décrit AB autour de A. Car, si on fait glisser une

(*) En réalité, c'est à cette somme que l'on compare certains angles quand on les exprime sous la forme $\frac{2\pi}{n}$; comme on le fait en trigonométrie, notamment en parlant des polygones réguliers. On veut faire comprendre rapidement que l'angle est la $n^{ième}$ partie d'un tour. C'est comme si on écrivait $\frac{\text{tour}}{n}$. La valeur du nombre π ne joue ici aucun rôle,

portion du plan qui environne A′ de manière à amener A′B′ à prendre la direction de AB, et si chaque droite effectue sa rotation, les deux sommes coïncideront quand les droites seront revenues à leurs positions initiales.

3. Définitions. — On peut diviser cette somme invariable en autant de parties égales qu'on voudra.

Si on la divise en quatre parties égales, chaque angle ainsi obtenu s'appelle *angle droit*.

Si on la divise en 360 parties égales, chaque angle s'appelle degré. L'angle droit vaut donc 90 degrés, qu'on écrit ainsi : 90°. La moitié d'un tour vaut deux droits ou 180°.

4. Théorème. — *La somme des deux angles formés en* C *par une demi-droite* CD *qui rencontre la droite* ACB *est égale à deux droits ou à* 180°.

Car si on fait tourner la portion ADB du plan autour de AB (*), la somme des deux angles formés par CD recouvre la somme des angles qu'on peut former de l'autre côté de AB. Donc la première somme égale la moitié de 4 droits ou de 360°.

La *réciproque* s'établit de la manière habituelle.

5. Corollaire. — *Deux angles* α, α' *opposés par le sommet sont égaux.*

Car, soit β l'angle intermédiaire. Celui-ci égale $180° - \alpha$ (4), puisque deux côtés sont en ligne droite. De même il égale $180° - \alpha'$. Dès lors

$$180° - \alpha = 180° - \alpha' \quad \text{ou} \quad \alpha = \alpha'.$$

6. — L'étude des angles ayant été faite sans parler des perpendiculaires, nous arrivons à leur définition.

---

sinon quand on en vient à chercher combien de degrés contient l'unité d'angle, ce qui est peu utile et donne un nombre compliqué. Au contraire, quand on prend pour unité d'angle l'angle droit ou le degré, ce qu'on se propose, c'est d'avoir une unité facile à concevoir, sans s'occuper de la simplicité des valeurs qui en résulteront pour les angles usuels. On néglige généralement de faire comprendre aux commençants la différence profonde de ces deux buts.

(*) Si on veut rendre cette démonstration indépendante de la *retournabilité* du plan, il suffit de faire tourner la portion ABD autour de C. Alors le raisonnement s'appliquerait à la sphère.

Définition. — On dit que deux droites sont *perpendiculaires entre elles* lorsqu'elles font un angle droit.

D'après le corollaire (5), les quatre angles sont droits, dans ce cas.

7. Théorème. — *Par un point* C *pris sur une droite* AB, *on peut élever à* AB *une perpendiculaire et une seule.*

On peut en élever une. Car cela revient à dire (6) qu'on peut faire en C un angle égal à un quart de tour.

Plus généralement, il est clair qu'on peut faire telle fraction de tour que l'on veut, par exemple un angle d'un degré.

On ne peut mener qu'une perpendiculaire. Car le tour complet étant une somme invariable, il en est de même de son quart. Toute droite CD′ fait, soit en dessus, soit en dessous de AB, un angle plus grand ou plus petit que celui de CD ; et, par suite, différent d'un quart de tour.

Remarque. — La théorie précédente est complétée par la description du rapporteur. Comme celui-ci n'a pas forcément la forme circulaire, il n'est pas nécessaire que l'on connaisse la définition du cercle. On se sert de degrés *angulaires*, sans avoir besoin de connaître leur correspondance, très simple du reste, avec les degrés *circulaires*. On peut de même parler de l'équerre pour tracer les angles droits. sans avoir besoin de savoir si on a fabriqué cet instrument autrement que par tâtonnement.

SUR UN PROBLÈME (*)

DE LA GÉOMÉTRIE DE LA RÈGLE

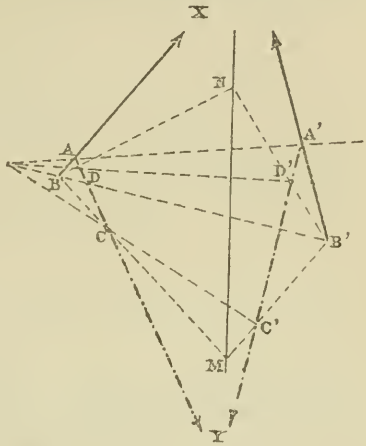
Par M. **Aletrop.**

Nous nous proposons le problème suivant :

Étant données deux couples de droites, les sommets x, y *de ces couples étant supposés inaccessibles, tracer la droite* xy.

(*) Ce célèbre problème est traité dans l'ouvrage de M. G. de Longchamps : *Essai sur la géométrie de la règle*, pp. 242-256 ; mais les solutions qu'on y donne sont, croyons-nous, moins simples que celles que nous présentons ici.

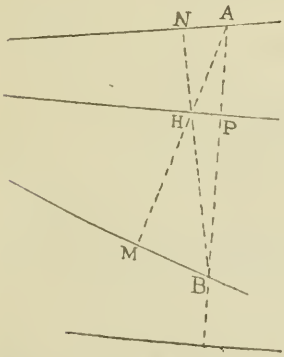
Dans la solution que nous allons indiquer, nous nous appuierons uniquement sur le premier livre de la Géométrie; de plus, et sans écrire aucune égalité, nous déterminerons la distance des deux points.



Première solution. — Soient AB, A'B' et AC, A'C' les couples donnés. En considérant les triangles homologiques ABC, A'B'C'; ABD, A'B'D'; MN est la droite demandée.

Symbole de l'opération totale : op: $(15R_1 + 9R_2)$; Simplicité, 24; exactitude, 15; 9 droites.

Seconde solution (par le premier livre seul). — La solution précédente étant de nature projective, s'applique encore lorsque l'une des droites de l'un des couples est la droite de l'infini du plan de la figure. Alors le problème peut s'énoncer ainsi :



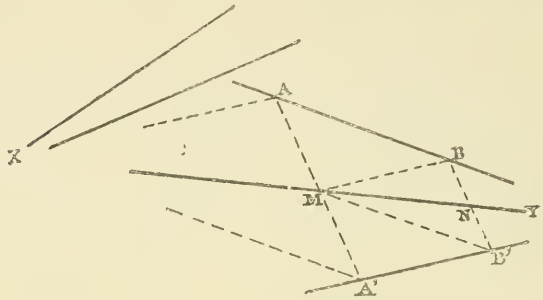
Par le point d'intersection inaccessible d'un couple de droites, mener une droite parallèle à une droite donnée.

Soit AN, BM, le couple donné. Menons les perpendiculaires AB, AM, BN, HP à la droite donnée, par A à BM, par B à AN, par H à AB. HP est la droite cherchée.

Revenons maintenant à notre problème. Menons par X les parallèles XA, XA' à A'B', AB, et par le milieu M de AA' encore les parallèles MB, MB' à A'B', AB; si N est le milieu de BB', MN est la droite demandée.

Remarque. — Les solutions précédentes montrent clairement la différence, signalée à plusieurs reprises dans ce journal,

qu'il convient d'observer entre la *simplicité géométrographique* et la *simplicité géométrique*. Je n'ai pas eu la patience suffisante pour établir la simplicité géométrographique de la



deuxième solution, la plus simple certainement au point de vue géométrique. Mais cette simplicité est sûrement exprimée par un nombre de beaucoup supérieur à celui que nous avons trouvé pour la première construction.

En ayant égard à l'une et à l'autre simplicité, les solutions précédentes sont, croyons-nous, les plus simples qu'on puisse donner du problème en question.

CONSTRUCTION DU FAISCEAU

(1) $$ax^2 + bxy + cy^2 = 0.$$

Par M. **Raffalli**, professeur au lycée du Puy.

Nous supposons les axes rectangulaires et nous considérons la parabole P qui correspond à l'équation

$$y^2 - 4cx = 0.$$

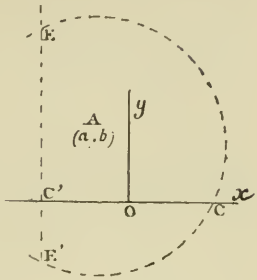
Soit C le foyer de P, situé sur Ox, à une distance c de l'origine.

Par le point A de coordonnées (a, b), menons des tangentes à cette parabole. L'ensemble des tangentes sera représenté par l'équation

$$(y^2 - 4cx)(b^2 - 4ca) - [by - 2c(x + a)]^2 = 0.$$

Les parallèles menées par l'origine à ces tangentes correspondent donc à l'équation

(2) $ay^2 - bxy + cx^2 = 0.$



Or, les droites (2) sont perpendiculaires aux droites (1); par suite, si, du point (a, b), on mène les tangentes à P, les droites (1) seront perpendiculaires à ces tangentes.

En résumé, les considérations précédentes conduisent à la construction suivante :

Du point A, *comme centre, décrivons un cercle passant en* C. *Ce cercle coupe la directrice en* E, E'. *Alors* CE, CE' *seront parallèles aux droites du faisceau* (1) (*).

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

423. — *Dans quels cas la somme des carrés de deux triangulaires consécutifs est-elle un carré?*

On a à résoudre, en nombres entiers :

$$\frac{x^2(x-1)^2}{4} + \frac{x^2(x+1)^2}{4} = z^2,$$

ou en posant, $z = xy$,

on obtient l'équation de Pell, bien connue, $x^2 + 1 = 2y^2$, qui admet pour solutions :

$$x_0 = 1, \quad x_1 = 7, \quad x_2 = 41, \quad \ldots\ldots \quad x_n = 6x_{n-1} - x_{n-2}.$$

(*) La construction proposée par M. Raffalli est très élégante; peut-être n'a-t-elle pas encore été signalée.

Mais elle a l'inconvénient d'exiger une démonstration qui n'est pas élémentaire.

La construction d'un faisceau de droites constitue un problème intéressant, car elle se rencontre dans un grand nombre de problèmes élémentaires. Ordinairement, on se contente de dire, je crois, quand une solution aboutit à cette construction : *En faisant* y = a, *on est ramené à construire les racines de l'équation* $x^2 + bx + ac = 0$, etc.

N'y a-t-il pas lieu de rechercher des solutions aussi élémentaires que celle que nous rappelons ici, mais plus directes ou plus élégantes? Peut-être cette question intéressera-t-elle quelques-uns de nos correspondants; il nous a paru utile de la soulever.

Au dernier moment, nous recevons de M. Raffalli la communication de la construction suivante : Soient M', M'' les points de rencontre de la droite $x = -2c$ avec le faisceau. Sur Ox, prenons $OP = -2c$; par P, traçons Δ perpendiculaire à Ox et considérons le point I de coordonnées $a - c$, b. Le cercle de centre I, de rayon IC, coupe Δ aux points cherchés M', M''. Mais il y aura lieu de rechercher, *en axes obliques*, une construction analogue. G. L.

424. — *Pour quelles valeurs de* n, *la somme des cubes des* n *premiers nombres impairs est-elle un carré?*

Cette somme ayant pour expression : $n^2(2n^2 - 1)$, il faut et il suffit que $2n^2 - 1$ soit un carré; équation de Pell, souvent rencontrée, qui a pour solutions :

$$1,\ 5,\ 29,\ \ldots\ldots \qquad u_p = 6u_{p-1} - u_{p-2}.$$

425. — *Quel est le nombre des côtés des polygones convexes dont le nombre des diagonales est un carré?*

On a à résoudre en nombre entiers l'équation :

$$n^2 - 3n - 2x^2 = 0.$$

Les valeurs de n sont toutes données par la suite récurrente :

$$u_1 = 3, \quad u_2 = 6, \quad u_3 = 27, \quad u_4 = 150, \quad \ldots\ldots$$
$$u_p = 6u_{p-1} - u_{p-2} - 6.$$

Nous proposons de vérifier qu'aucun terme de cette suite n'est un carré; donc *il n'existe pas de polygones convexes tels que le nombre de leurs côtés et celui de leurs diagonales soient simultanément des carrés.*

CORRESPONDANCE

Nous avons reçu de M. Aubry la lettre suivante qui intéressera certainement plusieurs de nos lecteurs :

« Votre article bibliographique relatif à la *Géométrie* de MM. Rouché et de Comberousse, m'a inspiré quelques réflexions que je vous demanderai la permission de vous soumettre.

On peut concevoir l'étude des mathématiques : 1° au point de vue philosophique, pour aviver les facultés intellectuelles et s'exercer à raisonner juste; alors peu importe le sujet, pourvu qu'il soit intéressant; 2° comme simple spéculation destinée à faire acquérir rapidement de grandes connaissances et accroître le nombre de celles déjà connues par l'examen de vues nouvelles. L'apparition de la philosophie mathématique, créée par Descartes et Leibniz, et qui a surtout porté ses fruits dans le XIXe siècle, si prodigieusement fertile en découvertes de toutes sortes, montre bien que la première manière est véritablement la bonne. Toutefois — et on ne paraît pas assez faire cette distinction — pour les commençants, il vaut mieux employer la seconde méthode : l'élève ne sait où on le mène et il importe qu'on lui épargne le plus possible les

ennuis des débuts et c'est pour lui que le mot de d'Alembert (*), si critiqué, paraît une vérité incontestable. L'édifice géométrique est éclairé seulement à l'intérieur; pour y arriver, il faut bien se résoudre à parcourir le vestibule à tâtons; mais une fois dans l'intérieur de l'édifice, on peut se servir de la lumière qui l'inonde pour en éclairer la pièce d'entrée. De là une *géométrie didactique* pour les commençants, et une *géométrie philosophique* pour élucider les idées, signaler les difficultés et remettre au point ce qui pourrait avoir été mal interprété.

Parlons, par exemple, de la définition de la droite. Platon appelle ainsi « *la ligne dont les parties du milieu ombragent celles des extrémités* ». On a seulement ainsi une simple propriété de la droite, ou plutôt une propriété des rayons lumineux. Euclide commence son premier livre par des définitions dont voici les sept premières :

1. *Le point est ce qui n'a aucune partie*, ce qui ferait croire que la géométrie raisonne sur des êtres imaginaires. Platon et Aristote parlent du point comme déjà défini, le point des physiciens.

2. *La ligne est une longueur sans largeur*. Qu'est-ce que la longueur? Qu'est-ce que la largeur?

3. *Les extrémités des lignes sont des points*. Et si la ligne est ensuite prolongée?

4. *La droite est celle qui est également étendue entre ses points* (**). Quoi de plus vague?

5. *La surface est ce qui a seulement longueur et largeur*. Voir 2.

6. *Les termes de la surface sont des lignes*. Voir 3.

7. *Le plan est la surface également étendue entre ses lignes*.

On voit qu'Euclide n'est rien moins que clair.

Archimède demande qu'on admette que « *la ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre* ». Ce n'est point une définition, mais un axiome.

Théon de Smyrne définit la droite la ligne « *directe* » et explique cette expression par les définitions d'Euclide et d'Archimède.

(*) « Allez en avant, la foi vous viendra. »

(**) Le texte même d'Euclide est le suivant : ὀρθὴ γράμμη... « ἥτις ἐξ ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται. »

Legendre a repris les définitions d'Euclide en définissant d'abord la géométrie comme la science de la mesure de l'étendue, et en enseignant que l'étendue a trois dimensions : longueur, largeur et hauteur, ce qui demande la connaissance préalable des perpendiculaires, des distances, des mesures, des longueurs et d'autres idées encore qui ne peuvent être comprises.

Fourier a défini le plan comme le lieu des points également distants de deux points fixes donnés et la droite comme le lieu des points également distants de trois points fixes donnés.

Lobatchefski définit d'abord la sphère, puis la circonférence, comme l'intersection de deux sphères, le plan comme le lieu des circonférences analogues et la droite comme l'intersection de deux plans.

D'après une heureuse innovation dont nous n'avons pu retrouver le premier auteur, depuis une cinquantaine d'années, on définit d'abord le solide, puis la surface, la ligne et le point.

L'idée du solide est antérieure à celle de surface. Ainsi il paraît logique de définir d'abord le *solide* comme partie de l'espace indéfini, par exemple un *corps* quelconque; puis la *surface*, ce qui sépare le solide du reste de l'espace; la *ligne*, l'intersection de deux surfaces; et le point, l'intersection de deux lignes. Par régression, on définira la ligne comme *trajet* d'un point en mouvement, et la surface comme produite par le mouvement d'une ligne.

On définira ensuite la *figure*, qui est l'ensemble d'un nombre quelconque de points *fixes*. Toute figure reste identique à elle-même quand on la transporte en un endroit quelconque de l'espace.

On appelle *distance* l'ensemble de deux points, et *compas* l'instrument propre à transporter une distance. Deux distances sont dites *égales* quand les deux points de l'une peuvent être amenés à *coïncider* avec les deux points de l'autre.

On appelle *lieu* d'un point l'ensemble des points jouissant d'une propriété donnée.

Le lieu des points également distants d'un point fixe est une *surface sphérique* dont ce point fixe est le *centre*. Le solide

renfermé par cette surface est une *sphère*. Deux sphères ou deux surfaces sphériques sont dites égales quand elles sont produites par des distances égales, qui, ici, prennent le nom de *rayons*. Elles peuvent donc coïncider en faisant simplement coïncider leurs centres, ce qui prouve qu'une surface sphérique peut se mouvoir autour de son centre, sans cesser de coïncider avec elle-même.

Si deux sphères se coupent, l'intersection est une *circonférence*, qui est ainsi le lieu d'un point mobile lié à deux points fixes par des distances constantes. En tournant autour de leurs centres, les sphères restent coïncidantes, donc une circonférence, en tournant autour de son centre, reste coïncidante avec elle-même.

Deux sphères égales ont leurs centres fixes et leurs rayons variables, tout en restant simultanément égaux : le lieu de leur intersection est une surface appelée *plan*. Comme les deux sphères coïncident en tournant autour des deux centres et qu'on a une figure identique en les permutant entre elles, on a deux manières de faire coïncider le plan avec lui-même.

De là, l'idée de *rotation* des figures. Pendant ce mouvement, il y a une succession de points qui ne bougent pas : l'ensemble de ces points est une *droite* : on *admet* qu'en deux points on ne peut mener qu'une seule droite, et qu'elle est le plus court *trajet* entre ces deux points.

Etc., etc.

Je crois qu'il y aurait grand profit à revenir de temps en temps ainsi aux bases de la science mathématique. L'algèbre ne s'appuie que sur un seul axiome : « on ne change pas une somme en modifiant également et dans des sens opposés deux de ses éléments ». Ne pourrait-il pas se faire que toute la géométrie ne reposât que sur le suivant : « une figure reste identique à elle-même quand on la transporte en un endroit quelconque de l'espace » qui correspond au premier.

Je vous livre ces réflexions pour ce qu'elles valent, étant loin de prétendre avoir, en une heure, tiré au clair cette délicate question. Mais je crois qu'il serait bon qu'on la méditât et qu'on arrivât à doter la géométrie de définitions exactes. Je parle non au point de vue didactique, car dans ce cas le che-

min le plus court sera toujours, je crois, le meilleur : on pourrait même davantage, au commencement, concrétiser les entités géométriques, mais au point de vue philosophique, le seul ou il faut se placer si l'on veut arriver à s'assimiler les théories et découvrir les idées générales reliant les méthodes entre elles en les réduisant à leurs principes essentiels ».

BIBLIOGRAPHIE

La librairie Belin vient de publier deux petits volumes que nous signalons à l'attention de nos lecteurs.

Le **Cours d'Algèbre**, *à l'usage des élèves de l'enseignement primaire supérieur*, complète la série des ouvrages que M. Andoyer, maître de conférences et chargé d'un cours complémentaire à la Faculté des sciences de Paris, a écrits pour cet enseignement. Ce dernier livre, comme ceux qui l'ont précédé et dont nous avons parlé autrefois, est une œuvre bien personnelle. L'introduction des nombres négatifs, cette difficulté de l'algèbre élémentaire, y est logiquement exposée, par les considérations des grandeurs susceptibles d'être mesurées dans deux sens différents. C'est ainsi, à notre avis, par cette voie naturelle et simple, qu'il faut présenter aux jeunes gens, la notion des grandeurs négatives, cette première difficulté de l'algèbre. Je félicite aussi l'auteur d'avoir eu le courage d'introduire dans ces éléments le signe de l'identité (*); cette réforme, malgré quelques avis opposés, l'avis de ces personnes qui pensent inutile d'adopter un signe nouveau, sous le prétexte, discutable je crois, que Newton et Lagrange n'en ont pas éprouvé la nécessité, s'impose vraiment; elle ajoutera singulièrement à la clarté qui doit régner dans les éléments et l'on accordera peut-être qu'on n'en saurait trop mettre dans les livres qui doivent être mis entre les mains des débutants.

Le second ouvrage dont nous voulons parler est intitulé **Éléments de Géométrie descriptive**, *à l'usage des candidats au baccalauréat de l'enseignement secondaire classique, des élèves de l'enseignement secondaire moyen*

(*) Le signe employé par M. Andoyer, et par la plupart des auteurs, est constitué par trois barres parallèles égales. Le signe que j'ai introduit autrefois diffère de celui-ci par la barre moyenne qui est plus petite que les deux autres. C'est M. Gauthier-Villars, un jour que nous causions ensemble de la nécessité d'introduire ce signe algébrique, qui me conseilla l'emploi de trois barres inégales. Le signe formé par trois barres égales offrait, à son avis, avis auquel je me suis rangé, l'inconvénient d'avoir été déjà employé dans des sens divers, notamment dans l'expression des congruences et dans la théorie des caractéristiques. Mais enfin, qu'on adopte un symbole ou un autre, la chose est de petite importance; l'essentiel est d'en avoir un.

et des candidats aux écoles du gouvernement, par M. H. Ferval, ancien élève de l'École normale supérieure, agrégé des sciences mathématiques, professeur au collège Stanislas. Ce petit livre est bien rédigé et il constitue un excellent guide pour les élèves, nombreux, je crois, qui éprouvent certaines difficultés *de vision* quand ils abordent la géométrie descriptive. Je loue particulièrement l'auteur d'avoir placé, de nombreux exercices, bien choisis d'ailleurs, à la fin des différents chapitres de son livre; je l'approuve aussi d'avoir, suivant en cela l'exemple de son ancien maître à Henri IV et à l'École normale, M. Caron, nettement dégagé la généralité des méthodes. Celles-ci, bien qu'en petit nombre, représentent *le bloc* que l'esprit doit s'assimiler tout d'abord pour voir de haut, et d'une façon inoubliable, les solutions des problèmes qui, dans leur variété infinie, se rattachent à l'idée mère. *G. L.*

BACCALAURÉAT

CLASSIQUE *(LETTRES-MATHÉMATIQUES)*
(Mars 1896)

Académie de Paris.

1° *Problème obligatoire :*

Étudier et représenter graphiquement la variation de la fraction

$$y = \frac{3x^2 + 7x + 4}{2x^2 - 5x - 7}$$

lorsque x prend toutes les valeurs possibles.

2° *Trois questions à choisir :*

1° Définition et détermination de la latitude d'un lieu à la surface de la terre.

2° Inégalité des jours et des nuits.

3° Inégalité des saisons.

QUESTION 148

(Voir p. 24).

Solution par M. Sollertinsky.

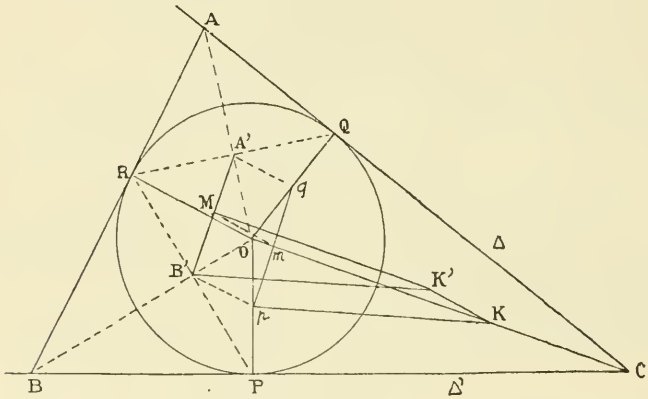
On donne deux droites fixes et un cercle, de centre O, *tangent à ces deux droites. Soit* AB *une tangente variable de ce cercle, et qui rencontre en* A *et* B *les deux droites fixes; soit* H *le point de concours des hauteurs du triangle* OAB. *Démontrer que le cercle des neuf points du triangle* OAB *enveloppe deux cercles, et que le cercle circonscrit au triangle* AHB *enveloppe aussi deux cercles fixes.* (Weill.)

Nous allons démontrer une proposition plus générale :

Une tangente variable d'un cercle fixe O *rencontre deux tangentes fixes* Δ, Δ′ *aux points* A, B. *Les cercles semblables* K (*) *décrits sur les cordes* AB *enveloppent deux cercles fixes, tangents à* Δ, Δ′.

Soient P, Q, R les points de contact du cercle O avec Δ′, Δ, AB. Déterminons la figure inverse, par rapport au cercle O. Les inverses A′, B′ des points A, B sont évidemment les intersections de OA, OB avec RQ, RP. La droite A′B′, comme joignant les milieux de RQ, RP, est parallèle à QP et égale à sa moitié.

L'angle AOB étant constant. les inverses K′ des cercles semblables K seront eux-mêmes semblables; mais étant



décrits sur les cordes A′B′ de longueur constante, ils seront tous égaux.

Soient p, q, m, M les milieux de OP, OQ, pq, A′B′. Sur la droite Om, qui est perpendiculaire à pq, portons mk = MK′.

Puisqu'on a kK′ = mM = pB′, les centres des cercles égaux K′ sont sur une circonférence décrite de k avec la moitié du rayon r du cercle fixe O. *Les cercles* K′ *enve-*

(*) Nous avons en vue les cercles dont les centres K sont les sommets des triangles isoscèles AKB, *directement* semblables.

loppent donc deux cercles concentriques ayant pour rayons $r_1 = k\mathrm{K}' + \mathrm{K}'\mathrm{B}'$, $r_2 = \pm (k\mathrm{K}' - \mathrm{K}'\mathrm{B}')$.

On en tire $\mathrm{K}'\mathrm{B}' = r_1 - k\mathrm{K}' = k\mathrm{K}' \pm r_2$

Or on a $kp = kq = \mathrm{K}'\mathrm{B}'$

Donc $kp = kq = r_1 - \frac{r}{2} = \frac{r}{2} \pm r_2$,

c'est-à-dire *les circonférences de rayons* r_1, r_2 *touchent* celles décrites sur OP, OQ, comme diamètres; mais celles-ci sont *les inverses des droites* Δ, Δ'.

Remarques. — **1.** On construit sans peine les cercles enveloppés par K. En effet, lorsque AB devient parallèle à l'une des droites Δ, Δ', le cercle K dégénère en une droite, facile à déterminer : on aura donc quatre tangentes communes des cercles cherchés.

2. La démonstration est en défaut pour les cercles AOB qui sont aussi semblables, et ces cercles, au lieu d'envelopper, touchent au point fixe O deux cercles fixes, tangents à Δ, Δ'.

Corollaires. — **1.** Soit C l'intersection de Δ, Δ'. H étant l'orthocentre du triangle AOB, on aura $\widehat{\mathrm{AHB}} = \pi - \widehat{\mathrm{AOB}} = \frac{\pi - \mathrm{C}}{2}$. *Les circonférences* AHB *sont donc des cercles semblables*, correspondants à l'angle $\widehat{\mathrm{AKB}} = \pi - \mathrm{C}$. Les cercles des neuf points de AOB sont homothétiques aux cercles AHB, le centre d'homothétie étant en O et le rapport étant égal à 1 : 2; ils enveloppent donc aussi deux cercles, homothétiques à ceux enveloppés par les cercles AHB.

2. En posant $\widehat{\mathrm{AKB}} = 2\mathrm{C}$, on retrouve un théorème de M. Mannheim cité par M. E. Catalan (*Théorèmes et problèmes de géométrie*, 6me édit., p. 164) :

Si, à un cercle J, *inscrit à un angle* xOy, *on mène une tangente* (*) *quelconque* A'B', *la circonférence circonscrite au triangle* OA'B' *est tangente à une circonférence* C' *inscrite à l'angle* xOy.

(*) Nous y avons omis le mot *extérieure*, parce que le théorème est vrai *pour toutes les tangentes sans exception*, comme on le voit par notre démonstration.

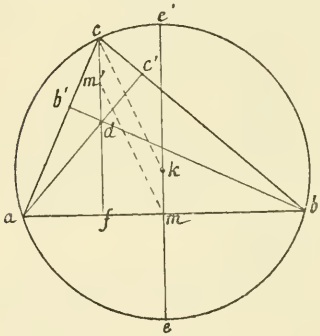
QUESTION 149 (*)

(Voir p. 45.)

Solution par M. B. Sollertinsky.

On donne deux droites fixes et un point O. *Un angle* AOB, *de grandeur constante, tourne autour du point* O. A *et* B *étant les points où ses côtés rencontrent respectivement les deux droites fixes, on mène* OA′ *perpendiculaire à* OA, *et rencontrant en* A′ *l'une des droites;* OB′, *perpendiculaire à* OB, *et qui rencontre l'autre droite en* B′; *enfin on projette le point* O *sur les quatre droites* AB, AA′, BB′, A′B′, *en* α, β, γ, δ. *Démontrer que: 1° le quadrangle* $\alpha\beta\gamma\delta$ *est inscriptible et son cercle circonscrit enveloppe deux cercles fixes; 2° les projections de* O *sur les trois diagonales du quadrilatère* ABA′B′ *sont sur une circonférence qui passe par un point fixe et touche un cercle fixe.* (Weill.)

1° Soient a, b les pôles des droites fixes, par rapport à une circonférence de centre O. Le pôle c de la droite AB est l'intersection des polaires ac, bc des points A, B. L'angle $\widehat{AOB}$ étant constant, il en est de même de son égal $\widehat{acb}$: le point c décrit donc une circonférence k, qui passe en a, b.



Les polaires de A′, B′ sont évidemment les hauteurs bb', ac' du triangle abc; par suite, les pieds b', c' de ces hauteurs et l'orthocentre d sont respectivement les pôles des droites AA′, BB′, A′B′. Les points α, β, γ, δ sont donc les inverses des points c, b', c', d par rapport au cercle O, et ceux-ci étant situés sur une circonférence, il en est de même de leurs inverses. Le diamètre cd de la circonférence $cb'dc'$ est deux fois plus grand que la distance km de la corde ab

(*) Énoncé rectifié.

au centre k. Le rayon $m'c$ de la circonférence est donc constant, et son centre m' se meut sur le cercle, décrit de m, comme centre, avec le rayon $mm' = kc$.

Par suite, le cercle m' touche constamment deux cercles, décrits de m avec les rayons mc, mc', les points c, c' étant les extrémités du diamètre km.

La circonférence $\alpha\beta\gamma\delta$ enveloppe donc les inverses de ces derniers cercles.

2° Le pied f de la troisième hauteur cf du triangle abc est le pôle de la troisième diagonale du quadrilatère ABA'B'.

Le cercle $c'b'f$ est celui des neuf points du triangle abc : il passe donc par un point fixe m et touche le cercle, décrit de m, avec le rayon mm'; mais les points b', c', f sont les inverses des projections de O sur les diagonales de ABA'B'.

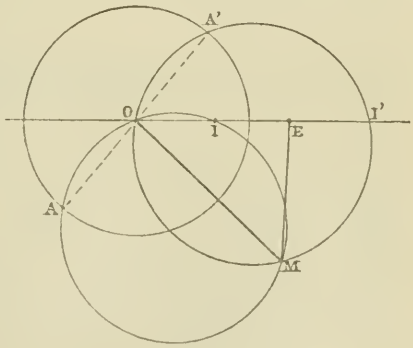
SUR LA QUESTION 184

Par M. **Raffalli**, professeur au lycée du Puy.

La première partie de cette question (*) peut s'établir, très simplement, de la manière suivante :

Considérons les deux triangles MAA' et MII'. Ces deux triangles sont semblables comme équiangles et le rapport des côtés sera $\frac{AA'}{II'}$. Traçons leurs médianes MO et ME; nous avons

$$\frac{MO}{ME} = \frac{AA'}{II'}.$$



Le lieu des points M est donc le lieu des points dont le rapport des distances à deux points fixes O, E est constant; c'est donc une circonférence dont le centre ω est sur OI.

(*) Résolue p. 88.

QUESTION 488

Solution (*)

Étant données deux forces P, Q *non situées dans un même plan, trouver la résultante générale, l'axe central de réduction et la valeur du couple minimum.* (H. Dellac).

Soit HK la perpendiculaire commune entre les droites P, Q, et soit V l'angle aigu formé par les directions de ces droites.

Résultante. — Transportons les deux forces parallèlement à elles-mêmes au point O pris sur HK. En formant le parallélogramme de ces forces on obtient la résultante générale R. Comme je suppose d'abord que les forces P, Q forment les côtés de l'angle V, la résultante R sera à l'intérieur de cet angle $P_1OQ_1 = V$, et je désigne par α, β les angles qu'elle fait avec ses composantes. On a

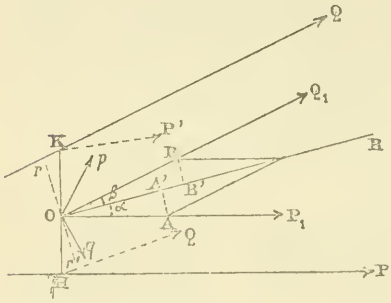


Fig. 1.

$$R = \sqrt{P^2 + Q^2 + 2PQ.\cos V}$$

$$\frac{P}{\sin\beta} = \frac{Q}{\sin\alpha} = \frac{R}{\sin V},$$

ce qui fait connaître les angles α, β.

Couple résultant. — La translation de la force P dans la position P_1 donne un couple dont le moment est égal à $P \times OH$, et dont le plan passe par HK. L'axe de ce couple mené par le point O est une droite Op perpendiculaire au plan $PHOP_1$ et par suite située dans le plan du parallélogramme P_1OQ_1; de plus, pour que l'observateur placé sur Op voie le couple

(*) Nous n'avons reçu aucune solution de cette question ; celle-ci est celle que l'auteur nous a communiquée.

tourner dans le sens des aiguilles d'une montre, il faut que Op soit situé du côté de OQ_1 par rapport à OP_1 ; il fait donc avec OR l'angle $90° - \alpha$. De même, la translation de Q donne un couple dont le moment est Q.OK, et dont l'axe Oq est situé dans le plan P_1OQ_1 du côté de OP_1 par rapport à OQ ; il fait donc avec OR l'angle $90° - \beta$. En composant les deux axes Op, Oq on aura l'axe du couple résultant G.

On sait que l'axe θ du couple minimum s'obtient en projetant l'axe du couple résultant G sur la direction de la force résultante R. Par suite, θ est égal à la somme des projections des composantes de G, et l'on a

$$\theta = p.\sin\alpha + q\sin\beta = P.OH\sin\alpha + Q.OK\sin\beta.$$

Or, on a déjà trouvé

$$P\sin\alpha = Q\sin\beta.$$

Donc $$\theta = P\sin\alpha \times HK = P.h.\sin\alpha.$$

Or, on a $$\sin\alpha = \frac{Q\sin V}{R}.$$

Donc, enfin $$\theta = \frac{P.Q.h.\sin V}{R}.$$

Dans la valeur de θ, le numérateur exprime le volume du tétraèdre ayant pour arêtes opposées les deux forces données P, Q. Ainsi, le moment du couple minimum est égal au quotient du volume du tétraèdre des forces données par la résultante de ces forces.

On sait que l'axe du couple minimum a la même direction que R. Dans le cas de la figure, il a aussi le même sens. Si la force P était placée en P′ et Q en Q′, il n'y aurait rien de changé dans la valeur absolue du couple minimum, mais son axe serait dirigé en sens contraire de R. Dans la valeur de θ, ce changement de sens se traduit par le changement de signe de h, si on regarde V comme invariable. En effet, si un observateur se place sur HK pour que son regard aille de P à Q dans le sens trigonométrique il faudra qu'il ait les pieds en H et la tête en K dans le cas des forces P, Q et en sens contraire pour P′, Q′.

Axe central. — L'axe central d'un système de forces est la position unique de la résultante générale telle que l'axe du

couple résultant soit parallèle à cette droite, ou, si l'on veut, coïncide avec elle.

Il faut d'abord que le centre de réduction choisi soit tel que la résultante générale soit située dans le plan déterminé par les axes des deux couples résultant de la translation. Cette condition est remplie pour tout point O pris sur HK.

De plus, il faut choisir le point O sur HK de manière que OR soit dirigée suivant la résultante des axes Op, Oq; pour cela il faut et il suffit que la somme algébrique des projections de ces axes sur une droite rr' située dans le plan du parallélogramme et perpendiculaire sur OR soit nulle. En regardant OH, OK comme des valeurs positives, dans le cas de la figure, on a

$$P.OH.\cos\alpha = Q.OK.\cos\beta,$$

d'où

$$\frac{OH}{OK} = \frac{Q\cos\beta}{P\cos\alpha},$$

ce qui détermine le point O sur HK. Il faut remarquer qu'une valeur positive de ce rapport nous donnera un point situé entre H et K et une valeur négative un point situé en dehors.

Discussion. — Pour examiner tous les cas de la question, nous pouvons supposer que P est constant et positif, que V est l'angle aigu formé par la direction des deux forces, et faire varier Q de $-\infty$ à $+\infty$.

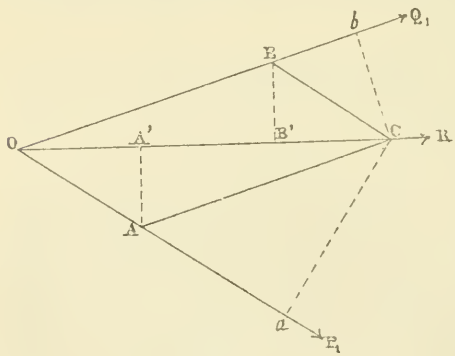


Fig. 2.

Il n'y a que les variations de l'axe central ou plus simplement du point O qui offrent quelque intérêt. Nous allons d'abord mettre sous une autre forme le rapport qui détermine cette position.

Soit OABC le parallélogramme des forces transportées en O; du point C j'abaisse sur OA, OB les perpendiculaires Ca, Cb et j'ai

$$\frac{OA'}{Oa} = \frac{OA}{OC} \qquad \text{d'où} \qquad OA' = \frac{Oa.P}{R};$$

de même,

$$OB' = \frac{Ob.Q}{R},$$

et par suite

$$\frac{OH}{OK} = \frac{OB'}{OA'} = \frac{Ob.Q}{Oa.P} = \frac{Q(Q + P\cos V)}{P(P + Q\cos V)} = y.$$

Nous allons étudier les variations de ce rapport en regardant Q comme variable indépendante.

Ces variations sont indiquées par le tableau suivant, que l'on forme aisément :

Q	$-\infty$	$-P\cot g\left(\frac{\pi}{4}-\frac{V}{2}\right)$	$-\frac{P}{\cos V}$	$-P\cos V$	$-P\,tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{V}{2}\right)$	0	$+\infty$
y	$-\infty$	$-\cot g^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{V}{2}\right)$	$\pm\infty$	0	$-tg^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{V}{2}\right)$	0	$+\infty$
		Maximum.			Minimum.		

Tant que Q est positif, le point O se trouve entre H et K. Pour $Q = 0$ l'axe central se confond avec P, et pour $Q = +\infty$ il se confond avec Q.

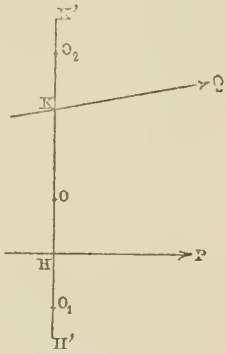


Fig. 3.

Lorsque Q décroît de 0 à $-P\,tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{V}{2}\right)$, le point O se trouve sur HH' et descend jusqu'en un point O_1. Entre $-P\,tg\left(\frac{\pi}{4}-\frac{V}{2}\right)$ et $-P\cos V$ le point O revient de O_1 en H. De $-P\cos V$ à $-\frac{P}{\cos V}$ le point O se trouve sur HK. Lorsque Q décroît de $-\frac{P}{\cos V}$ à $-P\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{V}{2}\right)$ le point O' se trouve sur KK et s'élève jusqu'en un point O_2. Enfin, lorsque Q décroît de $-P\cot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{V}{2}\right)$ à $-\infty$, le point O descend de O_2 en K. Si on avait $V = 0$, les points O_1 et O_2 seraient à l'infini.

On peut aisément se rendre compte des circonstances des cas limites.

On voit qu'il y a toujours deux valeurs de Q qui donnent

le même point O; mais elles ne donnent pas la même direction pour l'axe central.

Remarque. — Le lieu de l'axe central est une surface conoïde du sixième ordre.

QUESTIONS PROPOSÉES

730. — Rendre rationnelle l'équation

$$\left(x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}}\right)^4 - \left(a^2x^{\frac{2}{3}} + b^2y^{\frac{2}{3}}\right) = 0.$$

(E.-N. Barisien.)

731. — Deux droites Δ et Δ' sont perpendiculaires à une droite Δ'' et la rencontrent en A et B. On considère deux cercles C et C', le premier tangent à Δ et Δ'', le second tangent à Δ' et Δ'': ces deux cercles sont de plus tangents entre eux en M. La droite BM rencontre Δ en A' et la droite AM rencontre Δ' en B'. Montrer que AA' et BB' sont respectivement égaux aux diamètres des cercles C et C'. *(E.-N. Barisien.)*

732. — On donne une sphère et deux de ses tangentes. Une tangente mobile rencontre constamment ces deux droites: on demande le lieu des points où elle touche successivement la sphère? *(Mannheim.)*

733. — Étant donnés deux axes rectangulaires Ox, Oy et un point A sur Ox ($OA = a$), on considère sur Oy, à partir de O, deux points mobiles M, M', tels que $MM' = 2OA$.

Soient M_1 et M'_1 les symétriques de M et M' par rapport à O.

1° Lieu du point d'intersection D de la droite M_1A avec la parallèle M'D à MA.

2° Démontrer que les droites M'_1A et M'D se coupent sur la bissectrice de l'angle xOy.

3° Lieu du centre a du cercle circonscrit au triangle MAM'.

4° O' étant le symétrique de O par rapport à MA et B le point où O'M coupe la perpendiculaire en A à AM. On prend sur la perpendiculaire à MM' en son milieu G, une longueur $GC = O'B$;

Démontrer que la droite MC passe par un point fixe. *(Davidoglou.)*

734. — On donne l'équation

$$2Rx^3 - (p^2 + r\delta)\,x^2 + 4p^2rx - 4p^2r^2 = 0,$$

$\delta = 4R + r$; r, R, p, ayant leur signification ordinaire, dans un triangle ABC dont les côtés sont a, b, c.

1° Trouver les racines de cette équation;

2° Démontrer qu'avec ces racines on peut construire un triangle si l'on a

$$8R > \frac{4S}{\sqrt{\Sigma a^2}} + \frac{\Sigma a^2 \sqrt{\Sigma a^2}}{4S},$$

S désignant l'aire du triangle ABC. *(Davidoglou.)*

735. — On donne une demi-circonférence de diamètre AB et de centre O, et un point P sur AB. Trouver sur la demi-circonférence un point C tel que le triangle COP ait une aire maximum. *(E.-N. Barisien.)*

736. — Sur les trois côtés d'un triangle rectangle, comme côtés homologues, on construit trois polygones semblables, et l'on considère toutes les forces représentées par les côtés de ces polygones qu'on dirige en parcourant les contours des deux petits polygones dans un même sens de rotation, et celui du grand polygone dans le sens contraire. — Démontrer que toutes ces forces se font équilibre. *(M. Fouché.)*

737. — On considère un triangle ABC et trois droites concourantes issues des sommets, AO, BO, CO, qui coupent respectivement les côtés opposés en D, E, F. On considère les forces représentées en grandeur, direction et sens par les segments AE, AF; BF, BD; CD, CE, et trois forces représentées par les vecteurs 2DO, 2EO, 2FO, mais appliquées au milieu de chaque côté correspondant. — Trouver la résultante de ces 9 forces et en déduire qu'il ne peut y avoir équilibre que si les trois droites AO, BO, CO sont les médianes du triangle. *(M. Fouché.)*

738. — On donne dans l'espace deux systèmes de points A, A′, A″... et B, B′, B″.... On joint de toutes les manières possibles un des points A a l'un des points B. Quelle est la résultante de toutes les forces représentées par les segments AB ainsi obtenus. *(M. Fouché.)*

739.* — Étant donné un triangle ABC, trouver le point M tel que les perpendiculaires à MA, MB, MC forment un triangle triplement orthologique par permutation circulaire avec ABC. *(E. Lemoine.)*

740. — La tangente en un point M d'une parabole, de sommet O, rencontre l'axe de la parabole en T et la tangente au sommet en T′.

La droite Δ menée, par O, parallèlement à la tangente MTT′,

rencontre la parallèle menée par T, à OM, en P, et la parallèle menée par T', à OM, en P'.

Quand le point M parcourt la parabole, le point P, le point P' et le milieu de PP' décrivent chacun une parabole.

(E.-N. Barisien.)

741. — On considère un triangle ABC inscrit à une circonférence Γ. Démontrer les propositions suivantes :

1° On peut trouver sur BC un point A' tel qu'en menant par ce point une transversale mobile coupant Γ aux points M_1, N_1, les droites AM_1, AN_1 rencontrent BC en deux points isotomiques M, N;

2° Le point A' et les points analogues B', C' sont en ligne droite;

3° $AM.AM_1 + AN.AN_1$ est constante;

4° On a : $\overline{AM}^2 . A'M_1 = \overline{AN}^2 . A'N_1$,

$$MN(\overline{AC}^2 - \overline{AB}^2) = BC(\overline{AN}^2 - \overline{AM}^2);$$

5° Si AB, AC rencontrent M_1N_1 respectivement en B_1, C_1, on a

$$\frac{B_1N_1 . C_1N_1}{B_1M_1 . C_1M_1} = \left(\frac{A'M . A'N_1}{A'N . A'M_1}\right)^2$$

(Davidoglou.)

742. — Soit donné un triangle ABC et soient A_1, B_1, C_1 les points où les médianes coupent le cercle circonscrit au triangle ABC. Si S et S_1 représentent les surfaces des triangles homologiques ABC et $A_1B_1C_1$, on a la relation

$$\frac{S_1}{S} = \frac{[a^2 + b^2 + c^2]^3}{[2(b^2 + c^2) - a^2]\,[2(a^2 + c^2) - b^2]\,[2(a^2 + b^2) - c^2]}$$

(Jorge F. d'Avillez.)

743. — L'inverse de la longueur commune des demi-droites, issues du point de Jerabek (*) d'un triangle, est égale à la somme des inverses des côtés du triangle.

(Jorge F. d'Avillez.)

744. — Construire un triangle *isoscèle* connaissant les distances du centre du cercle des neuf points de ce triangle aux sommets; calculer les côtés en fonction de ces distances; discuter le problème. *(E. Lemoine.)*

(*) Comme on le sait, le point de Jerabek d'un triangle est le point d'où l'on peut mener trois demi-droites égales, parallèles aux côtés du triangle.

Le Directeur Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 10010-5-96.

SUR LES TRIANGLES ÉQUIPOTENTIELS

Par M. **Angel Bozal Obejero**, professeur de mathématiques, à Madrid.

Nous nous proposons d'étudier quelques-unes des propriétés des triangles équipotentiels, ainsi nommés par le savant mathématicien M. Juan J. Durán Loriga, commandant dans l'armée espagnole.

I. *Définitions.* — a, b, c, étant les côtés d'un triangle quelconque, les expressions

$$(1)\quad p_a = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}, \quad p_b = \frac{a^2+c^2-b^2}{2}, \quad p_c = \frac{a^2+b^2-c^2}{2},$$

ont été nommées, par M. Durán Loriga, *puissances partielles du triangle* relatives aux sommets A, B, C, respectivement. Pour les obtenir, il suffit de trouver les puissances des sommets par rapport aux circonférences décrites sur les côtés opposés comme diamètres et d'exprimer cette puissance en fonction des côtés du triangle.

Remarque. — On peut écrire lesdites puissances sous une autre forme.

Si r, r_a, r_b, r_c sont les rayons des circonférences inscrites et ex-inscrites au triangle ABC, on sait que

$$\frac{a^2+b^2-c^2}{2} = r_a r_b - r r_c.$$

Par suite, $p_a = r_b r_c - r r_a$, $p_b = r_a r_c - r r_b$, $p_c = r_a r_b - r r_c$.

II. — En désignant par P la somme $p_a + p_b + p_c$, on a

$$P = \frac{a^2+b^2+c^2}{2},$$

expression nommée par le dit mathématicien *puissance totale* du triangle.

D'après la remarque antérieure, il en résulte

$$P = r_a r_b + r_b r_c + r_c r_a - r(r_a + r_b + r_c).$$

III. — Nous appellerons *triangles équipotentiels ceux dont la puissance totale est la même.* Si a, b, c et a', b', c' sont les côtés de deux triangles, ceux-ci seront équipotentiels si l'on a

$$a^2 + b^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + c'^2.$$

IV. — On observera que la puissance totale est toujours positive, et que si l'on a $A = 90^\circ$ alors $p_a = 0$; donc le minimum de la puissance partielle est zéro. La puissance totale est alors $P = a^2$.

PROPRIÉTÉS DES TRIANGLES ÉQUIPOTENTIELS

I. — De la dernière conséquence on déduit que si le sommet d'un triangle rectangle se déplace sur la circonférence circonscrite, tous les triangles ainsi formés sont équipotentiels.

On voit de même que le lieu du sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle qui se déforme en restant équipotentiel, est une circonférence circonscrite au même triangle, et dont le rayon est la moitié de la racine carrée arithmétique de la dite puissance.

Cette propriété permet de résoudre le problème suivant: *Construire un triangle rectangle connaissant ses puissances partiales.*

Pour cela, on prend une droite $BC = \sqrt{p_b + p_c} = \sqrt{P}$, et, de son milieu pour centre, avec un rayon égal à $\frac{1}{2}\sqrt{P}$, on décrit une demi-circonférence, qui sera le lieu du sommet A. Pour fixer ce point, de B pour centre et avec un rayon égal à $\sqrt{p_b}$ on décrit un arc qui coupe la demi-circonférence au point A. On joint A aux points C et B, et ABC est le triangle demandé.

II. — *Si plusieurs triangles inscrits dans une même circonférence sont équipotentiels, les triangles formés par leurs médiatrices sont aussi équipotentiels.*

En effet, soient O le centre du cercle ABC, et K_a, K_b, K_c les médiatrices. Dans le triangle rectangle ODC ($OD = K_a$), on a: $4K_a^2 = 4R^2 - a^2$.

Pareillement: $4K_b^2 = 4R^2 - b^2$, $4K_c^2 = 4R^2 - c^2$.

En ajoutant et appelant P_K la puissance du triangle des médiatrices il en résulte

$$4P_K = 6R^2 - P,$$

et l'on voit que si R et P sont constants, il en est de même de P_K.

III. — *Lorsque plusieurs triangles sont équipotentiels, il en est de même des triangles formés par leurs médianes.*

En effet, si m_a, m_b, m_c sont les médianes, on a

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2),$$

d'où $P_m = \frac{3}{4} P$, P_m étant la puissance du triangle formé avec les médianes de ABC.

On voit que si P est constant, P_m jouit de la même propriété.

Remarque. — Cette propriété est un cas particulier de la proposition plus générale qui suit :

Si l'on prend sur les côtés de plusieurs triangles équipotentiels des points A′, B′, C′ *qui les divisent dans un même rapport* $\frac{m}{n}$, *les triangles formés par les céviennes correspondantes seront aussi équipotentiels.*

On sait en effet que

$$\frac{\alpha^2 + \beta + \gamma^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{(m + n)^2 - mn}{(m + n)^2} = \text{const.}$$

IV. — *Si plusieurs triangles sont équipotentiels, les triangles qui ont pour sommets les milieux* A′, B′, C′ *des côtés, le seront aussi.*

En effet, soient $a' = B'C'$, $b' = A'C'$, $c' = A'B'$ on a :

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = \frac{1}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

et appelant P′ la puissance des triangles susmentionnés,

$$P' = \frac{1}{4} P;$$

si P est constant, P′ le sera aussi.

Remarque. — *Le rapport des puissances* P *et* P′ *est égal à celui des aires* S *et* S′ *des dits triangles.*

V. — *Lorsque plusieurs triangles sont équipotentiels et équivalents simultanément, la somme de l'inverse du carré du rayon du cercle inscrit et celle des inverses des carrés des rayons des cercles ex-inscrits, est constante.*

En effet, d'après la notation employée dans la remarque du paragraphe (I), on a :

$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{r_a^2} + \frac{1}{r_b^2} + \frac{1}{r_c^2} = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{S^2} = \frac{2P}{S^2} = \text{const.}$$

VI. — *Si un triangle se déforme en restant équipotentiel et inscrit dans la même circonférence, la somme des cosinus des angles que forment les rayons qui aboutissent à leurs sommets, est constante.*

En effet, soient O le centre du cercle ABC et $\alpha = BOC$, $\beta = AOC$, $\gamma = AOB$, dans le triangle AOC, on a : $b^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \beta$. Pareillement on trouve :

$$a^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \alpha, \qquad c^2 = 2R^2 - 2R^2 \cos \gamma.$$

Ajoutant, il vient

$$2P = 6R^2 - 2R^2 (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma).$$

Par suite, $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma = \dfrac{3R^2 - P}{R^2} = 3 - \dfrac{P}{R^2}$,

d'où l'on voit que si P et S sont constants, il en sera de même du premier membre.

VII. — *Dans les triangles équipotentiels et équivalents, l'angle de Brocard est constant.*

En effet, l'angle de Brocard est défini par l'expression

$$\operatorname{cotg} \omega = \operatorname{cotg} A + \operatorname{cotg} B + \operatorname{cotg} C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S},$$

d'où

$$\operatorname{cotg} \omega = \frac{P}{2S},$$

et P et S étant constants, il en sera de même de ω.

VIII. — *Si plusieurs triangles restent équipotentiels et équivalents, ceux formés par les coordonnées normales du point de Lemoine, relativement aux côtés, seront équipotentiels.*

En appelant $\delta_a, \delta_b, \delta_c$, lesdites coordonnées, on sait qu'on a :

$$\frac{\delta_a}{a} = \frac{\delta_b}{b} = \frac{\delta_c}{c} = \frac{a\delta_a + b\delta_b + c\delta_c}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{2S}{a^2 + b^2 + c^2},$$

d'où

$$\delta_a^2 + \delta_b^2 + \delta_c^2 = 2P_\delta = \frac{4S^2}{a^2 + b^2 + c^2}$$

et finalement

$$P_\delta = \frac{S^2}{P}.$$

Si S et P sont constants, il en sera de même de P_δ.

Remarques. — De cette dernière égalité on conclut

$$S = \sqrt{PP_\delta};$$

d'où *l'aire du triangle* ABC *est une moyenne proportionnelle entre les puissances* P *et* P_δ.

2° On voit aussi que les coordonnées normales du point symédian sont $\delta_a = \frac{aS}{P}$, $\delta_b = \frac{bS}{P}$, $\delta_c = \frac{cS}{P}$.

IX. — 1° *Lorsque plusieurs triangles sont équipotentiels et inscrits dans une même circonférence, les polaires trilinéaires de leurs orthocentres sont tangentes à une même circonférence.*

Comme la perpendiculaire, menée du centre du cercle circonscrit à la polaire trilinéaire de l'orthocentre correspondant, a pour expression $\frac{3R^2 + \overline{OH}^2}{4OH}$, il est clair que si R est constant, elle aura une longueur constante. La proposition est donc vraie.

X. — *Si un triangle se déforme en restant équipotentiel et équivalent, le triangle podaire du point de Lemoine sera équivalent.*

En effet, étant D, E. F les pieds des coordonnées normales du point de Lemoine, et S′ la surface du triangle podaire correspondant, on a

$$S' = \frac{12S^3}{(a^2 + b^2 + c^2)^2}, \qquad \text{ou} \qquad S' = \frac{12S^3}{4P^2} = \frac{3S^3}{P^2};$$

donc si P et S sont constants, il en sera de même de S′.

Remarque. — Comme la surface du triangle pédal relative aux symédianes (triangle symédian) est

$$S'' = \frac{3S^3}{P^2},$$

nous pourrons dire aussi que *si plusieurs triangles sont équipotentiels et équivalents, les triangles podaires symédians seront équivalents.*

On voit, en outre, par les dernières égalités, que

$$S' = S'',$$

relation remarquable.

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME ÉLÉMENTAIRE

Par **M. Raffalli**, professeur au lycée du Puy.

Le théorème que je me propose d'établir par une méthode simple est le suivant : *On donne un angle* aob *et un point* s *dans son plan* ; *on mène par* s *une droite variable* asb. *Démontrer que*

$$\left(\frac{1}{sa} + \frac{1}{sb}\right) \frac{1}{\sin osb} = const. \ (*).$$

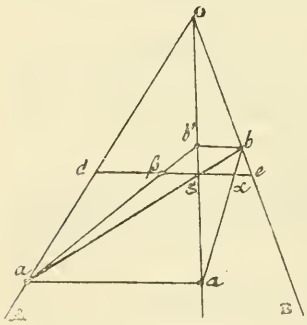
Traçons aa' et bb' perpendiculaires à os. La relation qu'il faut établir est :

$$\frac{1}{aa'} + \frac{1}{bb'} = \text{const.};$$

or, dans le trapèze $aa'\,bb'$, la somme $\frac{1}{aa'} + \frac{1}{bb'}$ est égale à $\frac{1}{s\alpha}$.

Il reste à démontrer que lorsque ab tourne autour de s, la droite ba' rencontre la perpendiculaire $s\alpha$ à so en un point fixe α.

Je considère le quadrilatère $aa'bo$. La droite $\alpha\beta$ rencontre ses côtés en six points en involution. Dans cette involution :



1° le point s est un point double ;

2° le point e correspond à l'∞. C'est doncle centre de l'involution ;

3° α et d sont homologues.

Donc, on a :

$$\overline{es}^2 = e\alpha . ed.$$

Donc enfin $e\alpha$ est constant (**).

(*) Mannheim, *Géométrie cinématique*, page 26.

(**) Si l'on veut ne pas invoquer les principes de l'involution, on peut établir le théorème en question de la manière suivante :

SUR LA CONSTRUCTION DU FAISCEAU $ax^2 + bxy + cy^2 = 0$

Par M. **Raffalli**, professeur au lycée du Puy.

Il est facile d'étendre aux *axes obliques*, comme le proposait M. de Longchamps, la deuxième construction que j'ai indiquée dans le dernier numéro du journal.

Soient M′ et M″ les points où le faisceau est rencontré par une parallèle aux y; par exemple

$$x - c.$$

Les ordonnées de M′ et M″ seront données par l'équation

$$(1) \qquad y^2 - by + ac = 0.$$

Soit O l'origine des coordonnées. *Je vais déterminer le cercle* OM′M″. Pour cela, je prends l'équation de ce cercle sous la forme :

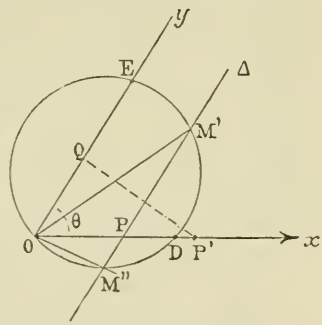
$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - mx - ny = 0.$$

Je fais dans cette équation $x = -c$. L'équation sur y sera

$$(2) \quad y^2 - [n + 2c\cos\theta]\,y + c^2 + mc = 0.$$

Le cercle passera en M′ et M″ si les équations (1) et (2) sont identiques. On a ainsi :

$$\begin{cases} m = a - c. \\ n = b - 2c\cos\theta. \end{cases}$$



Construction. — Sur Ox je porte une abscisse OP égale à $-c$

En abaissant de s, les perpendiculaires (non figurées) sh, sh' respectivement sur sa, sb, on a

$$oa.sh + ob.sh' = oa.ob \sin aob.$$

Or $\qquad oa.sh = so.aa', \qquad ob.sh' = so.bb'$, etc...

C'est probablement la démonstration directe à laquelle M. Mannheim fait allusion dans la note précédente.

A l'endroit cité, le théorème en question est simplement énoncé; il est accompagné de la note suivante : « On peut voir dans ma brochure *Transformation des propriétés métriques des figures à l'aide de la théorie des polaires réciproques* (Mallet-Bachelier, 1857), l'origine de ce théorème, ainsi qu'une démonstration directe, et dans mon *Cours de Géométrie descriptive* (2e édition, p. 191), une autre démonstration et quelques applications. Ce théorème, du reste, peut être très utilement employé; j'en ai fait beaucoup usage dans un *Mémoire d'Optique géométrique* qui se trouve à la fin de ce volume. »

(*) M. Bernès nous a envoyé cette généralisation, pour les axes obliques, de la construction donnée par M. Raffalli pour les axes rectangulaires.

et je mène par P la parallèle Δ à Oy. Je porte sur Ox une abscisse OD égale à $a - c$; sur Oy une ordonnée OE égale à $b - 2\cos\theta$. Le cercle ODE coupera Δ en M′ et M″, alors OM′ et OM″ sont les deux droites demandées.

Pour obtenir OE il n'y a qu'à prendre l'abscisse OP′ double de OP et à projeter OP′ en OQ sur l'axe Oy. A partir de Q, on porte alors le segment QE égal à b.

Nota. — La construction est identique, au fond, aux deux constructions déjà indiquées. Pour le cas des axes obliques, ce dernier énoncé est plus court.

SUR LES COMMENCEMENTS DE LA GÉOMÉTRIE

par M. **Raffalli.**

Les réflexions dont M. de Longchamps a fait suivre son article bibliographique sur la géométrie de M. Rouché ont déjà motivé des lettres de MM. Poulain et Aubry et en occasionneront probablement d'autres. L'année même de sa fondation, ce Journal a d'ailleurs publié, à ce sujet, des articles sous les signatures autorisées de MM. Bourget et Houel (*). Je ne songe pas à prendre parti dans la question. Je veux simplement me placer au point de vue de l'enseignement de la géométrie en quatrième classique et quatrième moderne. Le but me paraît être celui dont parle en premier lieu M. Aubry : « *aviver les facultés intellectuelles et exercer à raisonner juste* ». C'était d'ailleurs l'avis de Platon. La méthode devrait être autant que possible celle que semble préférer M. Aubry et qui consiste à se servir uniquement de ce principe : *une figure reste identique à elle-même quand on la transporte dans l'espace.* Il faut donc employer la méthode de superposition.

En conséquence, voici ce que nous proposons. En acceptant les préliminaires, tels qu'ils sont établis dans la géométrie de M. Rouché, ainsi que les définitions des figures égales et des mots : *perpendiculaire*, *bissectrice*, *somme d'angles*, etc... on continuerait comme il suit.

(*) A la page 17, M. Bourget y proposait une démonstration absolument insuffisante pour le troisième cas d'égalité des triangles.

1. Définition. — *On appelle ligne droite une ligne telle que si deux droites ont deux points communs, elles coïncident dans toute leur étendue.*

Il se peut que la définition ne soit pas complète et qu'elle ne le devienne qu'après le postulatum d'Euclide. Mais l'important est de ne se servir dans les démonstrations que de la *propriété* que je prends comme définition.

2. Postulat. — *La portion de droite comprise entre deux points* A *et* B *admet un milieu; autrement dit, il existe entre* A *et* B *un point* C *tel qu'on puisse faire coïncider* AC *et* CB.

Les élèves ne manquent pas là-dessus de se récrier et de dire « c'est évident ». On est bien forcé de leur répondre que ce mot-là n'a pas de sens en géométrie. On ne conçoit pas une droite autrement, mais enfin la *propriété* indiquée par le postulat ne résulte pas forcément de la définition.

Quant à ce mot de postulat, il me paraît utile de l'introduire pour le distinguer des axiomes communs comme: Deux quantités égales à une troisième, etc.

Au point de vue de l'enseignement, le postulat a l'avantage de mettre tout de suite les élèves en face de la méthode géométrique. Il ne s'agit pas de savoir si une vérité apparaît comme évidente, mais de savoir si elle résulte des définitions déjà posées ou des théorèmes déjà démontrés.

3. Théorème. — *Un angle admet toujours une bissectrice.*

Soit un angle xOy (*). Je prends sur ses côtés deux longueurs égales OA et OB. Soit I le milieu de AB. Je dis que OI est la bissectrice demandée.

En effet, je retourne l'angle et je place OA sur OB. J'en ai le droit d'après 1. Comme l'angle est resté identique à lui-même, OB vient alors sur OA et AB sur BA d'après 1. Donc, AI vient sur BI, AOI sur BOI. Donc, d'après la définition, AOI = BOI. C. Q. F. D.

4. — En un point O d'une droite AB on peut lui mener une perpendiculaire.

(*) Le lecteur est prié de faire la figure.

En effet, je place un même angle en BOC et AOD et je mène la bissectrice OE de COD. Alors

$$\widehat{DOE} = \widehat{COE}$$
$$DOA = BOA$$

d'où l'on conclut $\quad EOA = EOB.$

Nota. — Cette démonstration a au moins l'avantage d'être tirée de la première définition et du premier postulat. La démonstration classique est un véritable postulat. Dans le cours de logique de M. Rabier, dont la méthodologie scientifique me paraît magistrale, l'idée de perpendiculaire est donnée, avec raison, comme un nouvel axiome.

5. — A partir de là on continuerait comme dans le livre de M. Rouché...

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

426. — *Le produit :*

$$(x + 1)(x + 2)(x + 3)\ldots(x + n)$$

étant développé sous la forme :

$$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + Dx^{n-4} + \ldots$$

On trouve pour les premiers coefficients :

$$A = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$B = \frac{n(n^2-1)(3n+2)}{24},$$

$$C = \frac{n^2(n+1)^2(n-1)(n-2)}{48},$$

$$D = \frac{n(n^2-1)(n-2)(n-3)(15n^3+15n^2-10n-8)}{5760}.$$

Ce sont les sommes des produits obtenus en prenant pour facteurs les n premiers nombres entiers, deux à deux, trois à trois, quatre à quatre et cinq à cinq, de toutes les manières possibles, sans répétition.

427. — *Développement de* $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^p$.

Ce développement est un polynôme entier en x, le terme de degré le plus faible est x^p, et toutes les puissances successives de x sont représentées jusqu'à x^{6p}. Ce développement étant ordonné par rapport aux

puissances croissantes de x, est tel que les termes extrêmes et les termes à égale distance des extrêmes ont leurs coefficients égaux chacun à chacun; il suffit donc de connaître la moitié des coefficients, ou cette moitié plus un, suivant que le nombre des termes du développement est pair ou impair.

Le tableau ci-dessous comprend, dans leur ordre, les premiers coefficients (jusqu'à celui du milieu compris, si le nombre des termes est impair, ce qui a lieu lorsque p est pair).

$p = 2$ 1, 2, 3, 4, 5, 6.
$p = 3$ 1, 3, 6, 10, 15, 21, 25, 27.
$p = 4$ 1, 4, 10, 20, 35, 56, 80, 104, 125, 140, 146.
$p = 5$ 1, 5, 15, 35, 70, 126, 205, 305, 420, 540, 651, 735, 780.
$p = 6$ 1, 6, 21, 56, 126, 252, 456, 756, 1161, 1666, 2247, 2856, 3431, 3906, 4221, 4332.
$p = 7$ 1, 7, 28, 84, 210, 462, 917, 1667, 2807, 4417, 6538, 9142, 12117, 15267, 18327, 20993, 22967, 24017.

Le polynôme $(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^p$ est tel que le coefficient de x^n dans son développement est le nombre de manières dont on peut amener le point n avec p dés à jouer.

Le tableau précédent donne donc toutes les solutions jusqu'à 7 dés. Ainsi, si on demande de combien de manières on peut amener le point 20 avec 6 dés, on trouve pour coefficient de x^{20}, 4221; ce qui est la réponse.

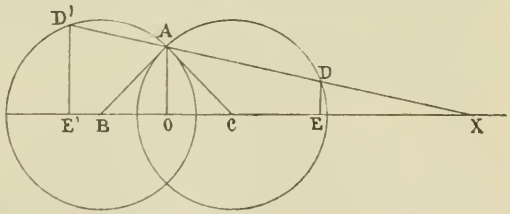
ÉCOLE NAVALE

(Concours de 1896)

1° Algèbre.

1° Étude de la fonction a^x.

2° On donne un triangle rectangle isoscèle ABC dont l'hypoténuse BC est égale à $2a$ et les deux cercles ayant pour centres les deux sommets B et C et pour rayons les deux côtés de l'angle droit du triangle rectangle. Trouver sur BC un point X ($OX = x$) tel que si l'on joint AX, et si l'on appelle D et D′ les points où cette droite coupe les cercles, E et E′ les projections de D et D′ sur BC, la surface du trapèze EDD′E′ soit égale à m^2. Généraliser le problème suivant les diverses positions du point X sur BC.



2° Arithmétique.

Avec quelle approximation pourra-t-on obtenir l'aire totale d'un tronc de cône dont les dimensions: $R = 17^m,64$, $v = 6^m,85$, $a = 13^m,23$, sont connues à moins de $0^m,01$?

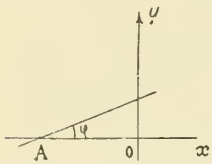
3° Géométrie.

1° Lieu dans l'espace des points à égales distances de deux droites qui se coupent.

2° Décrire une sphère tangente aux quatre côtés d'un quadrilatère gauche ABCD. Combien le problème admet-il en général de solutions? A quelles conditions doivent satisfaire les côtés de ce quadrilatère pour que toutes les sphères tangentes a trois des côtés soient tangentes au quatrième?

4° Géométrie analytique.

Ox et Oy étant deux axes rectangulaires, on considère toutes les hyperboles équilatères tangentes en O à l'axe des y et dont l'un des axes passe par un point fixe A de l'axe des x.



1° Trouver le lieu des centres et le lieu des foyers de ces hyperboles : distinguer sur le lieu des foyers les points qui correspondent aux foyers se trouvant sur l'axe passant par A des points se trouvant sur l'axe perpendiculaire.

2° Lieu des sommets ; le construire en coordonnées polaires.

Par chaque point du plan passent deux de ces hyperboles : distinguer les régions du plan qui correspondent à des hyperboles réelles. On prendra comme paramètre variable l'angle φ que fait l'axe des hyperboles passant par A avec l'axe des x et l'on posera $OA = -a$.

BACCALAURÉATS

(JUILLET 1895)

Académie d'Aix (Faculté de Marseille).

1° Déterminer par son sinus l'angle dièdre de deux faces adjacentes dans un tétraèdre régulier.

2° Étant données les relations (*)

$$\operatorname{tg} b = \sin c \operatorname{tg} B,$$
$$\operatorname{tg} c = \sin b \operatorname{tg} C,$$

démontrer que l'on a aussi

$$\sin B \cos c = \cos C.$$

Quel est le minimum du périmètre d'un trapèze isoscèle dont les angles sont égaux à 45° et dont l'aire est constante?

Dans un cercle on sait que les côtés de deux polygones réguliers sont $2a$ et $2b$. Le premier polygone a deux fois plus de côtés que le second. Déterminer le rayon du cercle. — Discussion. — Construction. — Dans

(*) Cet énoncé, emprunté à la trigonométrie sphérique, est soumis, je crois, à une restriction qui aurait dû être indiquée. Il faut supposer, comme on le fait dans la géométrie sphérique, que B est compris entre o et ϖ et que c, C sont de même nature. *G. L.*

quels cas les polygones sont-ils convexes ou étoilés? (On supposera, pour le fixer, qu'on ait déterminé l'angle du centre du polygone de côté $2a$.)

Solution. — On donne trois points A, B, C en ligne droite; le point B est placé entre le point A et le point C. La distance AB est égale à 10 mètres et la distance BC est égale à 20 mètres.

Par le point B on mène une droite BD faisant avec BC un angle de 60°; du point C on abaisse une perpendiculaire CD sur la droite BD et l'on joint AD :

1° Trouver en mètres carrés la surface du triangle ADC.

2° On applique sur le point D, dans le prolongement de BD, une force R qui est égale à 1000 kilogrammes; quelles forces PQ faut-il appliquer suivant DA et DC pour faire équilibre à R?

Académie d'Alger.

1. *Questions au choix :* 1° Deux cordons AP et MP ayant chacun une longueur de 1 mètre portent un poids P de 10 kilogrammes. Le point d'attache A étant fixe, quelle position peut-on donner au point M sur l'horizontale AX pour que les cordons puissent supporter, sans se rompre, le poids de 10 kilogrammes, sachant qu'ils ne peuvent résister à une tension supérieure à 30 kilogrammes. On prendra pour inconnue l'angle $PAM = \alpha$. Cet angle une fois déterminé permettra d'obtenir AM.

2° Deux cordons verticaux HA et KB supportent une barre homogène AB d'une longueur de 1 mètre et d'un poids de 2 kilogrammes. Sachant qu'ils ne peuvent résister à une tension supérieure à 10 kilogrammes, on demande en quels points M de la barre AB on peut suspendre un poids de 12 kilogrammes sans qu'il y ait rupture de l'un des cordons.

3° Le long d'un plan incliné AB faisant 30° avec l'horizon se meut un fardeau de 100 kilogrammes tiré par un cordon s'enroulant sur un treuil. Sur un deuxième plan incliné à 45° peut se mouvoir un fardeau tiré par un cordon tangent à la roue du treuil. Le rayon du treuil étant de $0^m,10$, celui de la roue étant de $0^m,40$, on demande le poids x qui fera équilibre au poids de 100 kilogrammes placé sur le premier plan incliné.

Problème. — On donne une demi-circonférence Δ décrite sur AB comme diamètre et la droite BH tangente en B. Trouver sur Δ un point M tel qu'en abaissant MH perpendiculaire sur BH, on ait $AM + MH = m$; m étant une longueur donnée. Trouver le maximum de m.

Académie de Clermont.

Questions au choix. — 1° Lieu géométrique des points dont le rapport des distances à deux points fixes est constant. Réciproque.

2° Lieu géométrique des points dont la différence des carrés des distances à deux points fixes est constante.

3° Indiquer et démontrer la relation qui existe entre le carré d'une corde perpendiculaire à l'axe d'une parabole et la distance de cette corde au sommet de la parabole.

Problème. — Deux cercles de centre B et C se coupent en A; l'angle BAC est droit. On mène une tangente commune qui touche les cercles en M et N. Calculer les rayons de ces cercles connaissant la tangente commune MN et la somme des diagonales du trapèze BCMN. — Discussion.

SUR LA QUESTION 7 (*)

Par M. **Bernès.**

On peut observer d'abord que la condition de concours de AA_1, BB_1, CC_1, $\Sigma \operatorname{cotg} \alpha = \Sigma \operatorname{cotg} A$, exprime que les trois triangles A_1BC, B_1CA, C_1AB ont même angle de Brocard θ que ABC, et qu'ainsi on est ramené à une question connue.

La propriété principale des trois cercles, lieux de A_1, B_1, C_1, est *qu'ils sont les transformés par inversion symétrique, relativement à* A, B, C *d'une même droite, la droite de Lemoine* (**). Celle-ci étant $\sum \frac{x}{a} = 0$, les équations des trois cercles sont

$$\sum ayz = \frac{2aS}{bc}(by + cz), \qquad \sum ayz = \frac{2bS}{ca}(cz + ax),$$

$$\sum ayz = \frac{2cS}{ab}(ax + by).$$

Les centres ω, ω', ω'' sont situés sur les médiatrices à des distances $\frac{a}{2}\operatorname{cotg}\theta$, $\frac{b}{2}\operatorname{cotg}\theta$, $\frac{c}{2}\operatorname{cotg}\theta$ de BC, CA, AB. *Les rayons* $A\omega$, $B\omega'$, $C\omega''$ *concourent au point de Tarry.* Les longueurs ρ, ρ', ρ'' des rayons sont données par $\frac{\rho}{a} = \frac{\rho'}{b} = \frac{\rho''}{c}$ $= \frac{\sqrt{a^4 + b^4 + c^4 - b^2c^2 - c^2a^2 - a^2b^2}}{4S} = \frac{1}{2}\sqrt{\operatorname{cotg}^2\theta - 3}$. Si A′, B′, C′ désignent les symétriques de A, B, C, relativement aux milieux de BC, CA, AB, A′ est le centre radical des trois cercles ω', ω'', ABC; B′ celui des cercles ω'', ω, ABC, etc. Enfin, le centre radical de ω, ω', ω'' est le réciproque, relativement au triangle A′B′C′, du point de Lemoine de ce triangle.

Une propriété remarquable de la droite de Lemoine est

(*) Voyez p. 68.

(**) M et M′ sont dits symétriquement inverses relativement à A, si l'un M′ est le symétrique relativement à la bissectrice de l'angle A du point N inverse de M par rapport au pôle A, la puissance d'inversion étant bc. Ils sont définis par l'équipollence $AM.AM' = AB.AC$.

également mise en évidence : *les points de cette droite peuvent se grouper trois par trois, de façon que les triangles podaires des trois points de chaque groupe soient directement semblables, les sommets homologues étant sur* BC, CA, AB. L'un quelconque de ces groupes G, G_1, G_2 s'obtient en coupant la droite de Lemoine par les trois droites AL, BL, CL qui joignent A, B, C à un point arbitraire de la circonférence ABC. De plus, *de même que* GA, G_1B, G_2C *concourent en* L *sur cette circonférence*, GB, G_1C, G_2A *concourent sur la même circonférence en* M *et* GC, G_1A, G_2B *en* N, déterminant ainsi un triangle LMN semblable aux trois podaires. Le groupe formé par les centres des trois cercles d'Apollonius est un cas particulier.

Un autre cas particulier est celui où l'un des points G est à l'infini. Les deux autres sont alors chacun en ligne droite avec le centre O du cercle ABC et l'un des points de Brocard. Leurs podaires sont égaux et inversement semblables à ABC.

SUR LA QUESTION 393

Cette question était ainsi énoncée :

1° *Soient* BA, AC, *deux côtés consécutifs quelconques d'un polygone régulier convexe ou étoilé. Trouver deux polygones réguliers, convexes ou étoilés, de côtés égaux à* AB, *et tels que les trois polygones groupés autour du point* A *recouvrent exactement la portion voisine de ce point, sans vide ni empiètement.*

2° *Laissant de côté le cas où les trois polygones seraient convexes, on reproduira la même disposition à chaque sommet des trois polygones : on obtiendra ainsi de nouveaux polygones dont on complétera l'assemblage, à chaque sommet, par l'adjonction de nouveaux polygones ; et ainsi de suite indéfiniment, sans s'inquiéter de savoir si les polygones se recouvrent partiellement ou non. On propose de chercher dans quel cas l'opération s'arrêtera; c'est-à-dire, dans quels cas un des polygones ainsi obtenus à un moment déterminé recouvrira le polygone primitif. La condition doit être la suivante : tous les sommets des polygones construits, au moment où l'opération s'arrête d'elle-même, doivent pouvoir être considérés comme ceux d'un réseau de polygones réguliers convexes recouvrant exactement le plan, sans vide ni duplicature.* (Lucien Lévy.)

NOTE

A propos de la question 393, dont l'énoncé est reproduit ci-dessus, M. L. Lévy, qui l'avait proposée, nous adresse la note suivante. Cette lettre, sans résoudre complètement la question, donne tous les renseignements qui s'y rattachent. Elle pourra peut-être provoquer d'autres recherches sur un point intéressant et difficile de la géométrie élémentaire.

« J'ai démontré (tome III, 8e série, page 46 du *Bulletin de la Société philomathique*) qu'on ne pouvait faire un pavage en entremêlant des polygones réguliers convexes et des polygones étoilés et j'ai donné incidemment la formule

$$(p - 1)N = n.$$

où n désigne le nombre de côtés du polygone étoilé d'espèce p et N le nombre des côtés du polygone convexe adjacent.

Avec ce qui se trouve indiqué dans beaucoup d'ouvrages de géométrie élémentaire comme exercices sur les polygones réguliers, cela peut constituer une réponse à la première partie de ma question 393. Je ferai cependant observer que ma question pose le problème d'une manière précise, tandis que tous les traités de géométrie (quand ils parlent de pavages) énoncent, en se reproduisant l'un l'autre, un théorème faux que voici : *on peut exécuter un pavage en employant simultanément des décagones et des pentagones réguliers de même côté*. Le théorème est faux en ce sens qu'on peut bien entourer un point avec deux pentagones et un décagone, ce qui est une des solutions de mon § 1°, mais qu'on ne peut reproduire la même disposition aux cinq sommets du pentagone régulier, ni, par conséquent constituer un pavage.

Quant à la deuxième partie de la question 393, je vous l'avais envoyée sous forme dubitative; elle relève plutôt du domaine de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*; mais ce dernier n'était pas né en 1891. Autant que mes souvenirs peuvent me servir, on trouvera une partie de la réponse dans un mémoire de M. Badoureau (tome XLIX du *Journal de l'École polytechnique*), mais M. Badoureau a l'air de considérer comme évident le théorème dont ma question demandait la démonstration. »

QUESTION 279

Solution, par M. A. Boutin.

Si $A + B + C = \pi$, *démontrer que l'on a:*

1° $\Sigma \cos 3A \cos(B - C) + 4 \cos(A - B)\cos(B - C)\cos(C - A) = 0.$

2° $\Sigma \cos^3 A \cos(B - C) + \cos(A - B)\cos(B - C)\cos(C - A)$
$$- 3\cos A \cos B \cos C - 1 = 0.$$

3° $\Sigma \cos 3A \cos^3(B - C) + 3\cos(A - B)\cos(B - C)\cos(C - A)$
$$+ 3\cos A \cos B \cos C + 1 = 0.$$

4° $\Sigma \sin^4 A \sin(B - C) + 16 \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \cdot \sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}$
$$\times \left[\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\right] = 0.$$

5° $tg^2 A\, tg^2 B\, tg^2 C - tg^2 A - tg^2 B - tg^2 C = 2 + 2\,séc A\, séc B\, séc C.$

6° $\left(1 + tg\frac{A}{4}\right)\left(1 + tg\frac{B}{4}\right)\left(1 + tg\frac{C}{4}\right) = 2 + 2\, tg\frac{A}{4}\, tg\frac{B}{4}\, tg\frac{C}{4}.$

7° $\left(1 + \cos\frac{A}{4}\right)\left(1 + \cos\frac{B}{4}\right)\left(1 + \cos\frac{C}{4}\right) = 2 + 2\cos\frac{A}{4}\cos\frac{B}{4}\cos\frac{C}{4}.$

8° $\left(2 + tg\frac{A}{4} + \cos\frac{A}{4}\right)\left(2 + tg\frac{B}{4} + \cos\frac{B}{4}\right)\left(2 + tg\frac{C}{4} + \cos\frac{C}{4}\right)$
$$= 4\left(2 + tg\frac{A}{4}\, tg\frac{B}{4}\, tg\frac{C}{4} + \cos\frac{A}{4}\cos\frac{B}{4}\cos\frac{C}{4}\right).$$

(E. Gelin.)

Nous avons reproduit toutes ces formules telles qu'elles ont été données quand cette question a été posée; quelques-unes sont inexactes et ont dû être rectifiées (*).

1° Le second membre doit être
$$= 1, \quad \text{et non} \quad = 0.$$

On a $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A,$

d'où, pour le premier membre de l'égalité donnée.
$$4\Sigma \cos^3 A \cos(B - C) + 4\cos(A - B)\cos(B - C)\cos(C - A)$$
$$- 3\Sigma \cos A \cos(B - C),$$

(*) Plusieurs de ces rectifications ont été faites. Voir *J. E.*, 1888, 120 et 1889, 24. *(G. L.)*

où, en tenant compte de la formule 2° (démontrée plus loin)

$$12 \cos A \cos B \cos C + 4 + \frac{3}{2} \Sigma \cos(B + C) \cos(B - C)$$
$$= 12 \cos A \cos B \cos C + 4 + 3 \Sigma \cos 2A,$$

mais une formule connue donne

$$\Sigma \cos 2A = -1 - 4 \cos A \cos B \cos C;$$

donc le premier membre de l'égalité à démontrer se réduit bien à l'unité.

2° On peut remarquer que si

$$a + b + c = 0,$$
$$4 \cos a \cos b \cos c - 1 = \Sigma \cos 2a;$$

donc

$$\cos(A - B) \cos(B - C) \cos(C - A) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \Sigma \cos 2(A - B).$$

L'identité à démontrer peut donc s'écrire successivement :

$$-\Sigma \cos^2 A \cos(B + C) \cos(B - C) + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \Sigma \cos 2(A - B)$$
$$- 3 \cos A \cos B \cos C - 1 = 0.$$

$$-\frac{1}{4} \Sigma (1 + \cos 2A)(\cos 2B + \cos 2C) - \frac{3}{4} - 3 \cos A \cos B \cos C$$
$$+ \frac{1}{4} \Sigma \cos 2(A - B) = 0.$$

$$-\frac{1}{2} \Sigma \cos 2A - \frac{1}{2} \Sigma \cos 2A \cos 2B - \frac{3}{4} - 3 \cos A \cos B \cos C$$
$$+ \frac{1}{4} \Sigma \cos 2A \cos 2B + \frac{1}{4} \Sigma \sin 2A \sin 2B = 0$$

$$-\frac{1}{2} \Sigma \cos 2A - \frac{1}{4} \Sigma \cos 2A - \frac{3}{4} - 3 \cos A \cos B \cos C = 0.$$
$$\Sigma \cos 2A + 1 + 4 \cos A \cos B \cos C = 0,$$

formule bien connue.

3° Cette formule doit être remplacée par la suivante :

$$\Sigma \cos 3A \cos^3(B - C) + 3 \cos(A - B) \cos(B - C) \cos(C - A)$$
$$= \cos 3A \cos 3B \cos 3C + 1.$$

On a $\cos^3(B - C) = \dfrac{\cos 3(B - C) + 3 \cos(B - C)}{4}$,

et le premier membre de la formule à démontrer devient

$$\frac{1}{4} \Sigma \cos 3A \cos 3(B - C) + \frac{3}{4} \Sigma \cos 3A \cos(B - C)$$
$$+ 3 \cos(A - B) \cos(B - C) \cos(C - A);$$

et tenant compte pour la seconde somme de la formule du 1° :

$$-\frac{1}{4}\Sigma\cos 3(B+C)\cos 3(B-C)+\frac{3}{4}$$
$$=-\frac{1}{8}\Sigma(\cos 6A+\cos 6B)+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\Sigma\cos 6A.$$

D'ailleurs

$$\Sigma\cos 6A=-1-4\cos 3A\cos 3B\cos 3C;$$

donc le premier membre devient :

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+\cos 3A\cos 3B\cos 3C=1+\cos 3A\cos 3B\cos 3C.$$

4° Cette formule est exacte dans des hypothèses particulières, par exemple $A=0$, ou $A=B$, ou $A=90°$, $B=60°$, $C=30°$. Il reste à voir si elle est vraie dans le cas général (*).

5° On a $\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C=\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C$;

d'où pour le premier membre de l'identité à vérifier :

$$2\Sigma\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B=\frac{2\Sigma\sin A\sin B\cos C}{\cos A\cos B\cos C}$$
$$=\frac{2\cos A\cos B\cos C-2\cos(A+B+C)}{\cos A\cos B\cos C}$$
$$=2+2\operatorname{séc} A\operatorname{séc} B\operatorname{séc} C.$$

6° On a :

$$\operatorname{tg}\left(\frac{A}{4}+\frac{B}{4}+\frac{C}{4}\right)=1=\frac{\Sigma\operatorname{tg}\frac{A}{4}-\operatorname{tg}\frac{A}{4}\operatorname{tg}\frac{B}{4}\operatorname{tg}\frac{C}{4}}{1-\Sigma\operatorname{tg}\frac{A}{4}\operatorname{tg}\frac{B}{4}}.$$

$$(1)\qquad \Sigma\operatorname{tg}\frac{A}{4}-\operatorname{tg}\frac{A}{4}\operatorname{tg}\frac{B}{4}\operatorname{tg}\frac{C}{4}=1-\Sigma\operatorname{tg}\frac{A}{4}\operatorname{tg}\frac{B}{4}.$$

L'identité proposée revient à :

$$1+\Sigma\operatorname{tg}\frac{A}{4}+\Sigma\operatorname{tg}\frac{A}{4}\operatorname{tg}\frac{B}{4}+\operatorname{tg}\frac{A}{4}\operatorname{tg}\frac{B}{4}\operatorname{tg}\frac{C}{4},$$
$$=2+2\operatorname{tg}\frac{A}{4}\operatorname{tg}\frac{B}{4}\operatorname{tg}\frac{C}{4},$$

ou

$$\Sigma\operatorname{tg}\frac{A}{4}+\Sigma\operatorname{tg}\frac{A}{4}\operatorname{tg}\frac{B}{4}=1+\operatorname{tg}\frac{A}{4}\operatorname{tg}\frac{B}{4}\operatorname{tg}\frac{C}{4}$$

qui est l'identité (1).

(*) J'ai reçu, trop tard pour la faire paraître dans ce numéro, la solution, par M. Brontin, de ce paragraphe; elle sera prochainement publiée.

G. L.

7° Cette formule est inexacte; elle devient exacte si on remplace tous les cosinus par des cotangentes (*).

Pour la vérifier alors, il suffit de remplacer dans l'identité qui fait l'objet de l'exercice précédent,

$$\operatorname{tg}\frac{A}{4},\ \text{par}\ \frac{1}{\operatorname{cotg}\frac{A}{4}};\quad \operatorname{tg}\frac{B}{4},\ \text{par}\ \frac{1}{\operatorname{cotg}\frac{B}{4}};\quad \operatorname{tg}\frac{C}{4},\ \text{par}\ \frac{1}{\operatorname{cotg}\frac{C}{4}};$$

et de chasser les dénominateurs.

8° Cette formule inexacte cesse de l'être si on remplace, comme dans la précédente, les cosinus qui y figurent par des cotangentes (*).

On a alors

$$2 + \operatorname{tg}\frac{A}{4} + \operatorname{cotg}\frac{A}{4} = 1 + \operatorname{tg}\frac{A}{4} + \operatorname{cotg}\frac{A}{4} + \operatorname{tg}\frac{A}{4}\operatorname{cotg}\frac{A}{4}$$
$$= \left(1 + \operatorname{tg}\frac{A}{4}\right)\left(1 + \operatorname{cotg}\frac{A}{4}\right).$$

Transformant de même les deux autres facteurs, le premier membre de la formule à démontrer devient le produit des premiers membres des formules 6° et 7°; on constate alors aisément que le second membre de 8° est aussi le produit des seconds membres de 6° et 7°.

QUESTION 394

Solution par M. E. Lemoine.

Soient F, F_a, F_b, F_c *les quatre points de contact du cercle de Feuerbach avec le cercle inscrit et les cercles ex-inscrits à un triangle* ABC; *on sait que les tangentes en ces points touchent l'ellipse d'aire maxima inscrite au triangle; soient* F′, F'_a, F'_b, F'_c, *les points de contact. Démontrer les formules*

$$FF' = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{p^2-3r\delta}$$
$$= -\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{\Sigma(b-c)^2}.$$

(*) On voit par cette remarque que les erreurs signalées ici et qui ont arrêté si longtemps la solution de cette question étaient des erreurs typographiques. *(G. L.)*

$$F_aF'_a = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(b-c)(c+a)(a+b)}{a^2+b^2+c^2-bc+ac+ab} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{(b-c)(c+a)(a+b)}{(p-a)^2+3r_a\delta_a},$$

où $\delta = 4R + r, \qquad \delta_a = 4R - r_a.$

(E. Lemoine.)

J'ai souvent attiré dans ce journal, à propos de diverses questions, l'attention, sur l'utilité de l'emploi, d'une part, de formules symétriques entre les éléments d'un triangle, formules dont j'ai donné un très grand nombre (*Mathesis*, 1892, p. 81-92), et, d'autre part, de la transformation continue; par leur moyen, je vais démontrer la question proposée, qui, sans elles, me paraît devoir être fort compliquée à établir.

Pour alléger la démonstration, en supposant connues (voir *locis citatis*) les formules

(1) $\Sigma a^2 = 2(p^2 - r\delta),$

(2) $\Sigma bc = p^2 + r\delta,$

(3) $\Sigma(b-c)^2 = 2(p^2 - 3r\delta),$

(4) $\Sigma(p-a)(b-c)^2 = 4S(R - 2r),$

(5) $\Sigma a^3 = 2p(p^2 - 6Rr - 3r^2),$

je vais démontrer la formule

$$\Sigma a^2(a-b)(a-c)(2p-3b)(2p-3c) = 16S^2(R-2r)^2.$$

qui me servira tout à l'heure.

Appelons I le premier membre de cette identité; posons

$$b - c = \lambda, \quad c - a = \mu, \quad a - b = \nu;$$

on aura successivement, en remarquant que $\lambda + \mu + \nu = 0$,

$$I = -\Sigma a^2\mu\nu(\lambda - \nu)(\mu - \nu) = -\Sigma a^2\mu\nu(\lambda\mu - \lambda\nu - \mu\nu + \nu^2),$$

$$I = -\lambda\mu\nu\Sigma a^2(\mu - \lambda + \nu) + \Sigma a^2\mu^2\nu^2,$$

$$I = 2\lambda\mu\nu\Sigma a^2\lambda + \Sigma a^2\mu^2\nu^2.$$

On voit facilement que

$$\Sigma a^2\lambda = \Sigma a^2(b-c) = -(b-c)(c-a)(a-b).$$

Donc

(6) $I = -2(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2 + \Sigma a^2(c-a)^2(a-b)^2.$

Calculons $\Sigma a^2(c-a)^2(a-b)^2$

on a
$$\begin{aligned}\Sigma a(c-a)(a-b) &= \Sigma a^3 - \Sigma a^2(b+c) + \Sigma abc\\ &= \Sigma a^3 - 2p\Sigma a^2 + \Sigma a^3 + 3abc\\ &= 2\Sigma a^3 - 2p\Sigma a^2 + 12RS,\end{aligned}$$

et, enfin, d'après les formules (1) et (5), toutes réductions faites $\Sigma a(c-a)(a-b) = 4S(R-2r),$

On voit facilement alors que l'on a identiquement

$$[\Sigma a(c-a)(a-b)]^2 = \Sigma a^2(c-a)^2(a-b)^2 + 2(b-c)(c-a)(a-b)\Sigma bc(b-c)$$

ou comme $\Sigma bc(b-c) = -(b-c)(c-a)(a-b)$

on a

$$\Sigma a^2(c-a)^2(a-b)^2 = 16S^2(R-2r)^2 + 2(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2,$$

d'où, en substituant dans la formule (6),

$$I = 16S^2(R-2r)^2 = \Sigma a^2(a-b)(a-c)(2p-3b)(2p-3c).$$

Ces préliminaires posés, cherchons la valeur de FF′.

On sait (voir *J. E.*, 1886, p. 193) que les coordonnées normales x, y, z; x', y', z' de F et de F′ sont respectivement $\frac{(p-a)(b-c)^2}{a}$, etc. $\frac{(b-c)^2}{a}$, etc., d'où l'on déduit que leurs coordonnées normales absolues x_1, y_1, z_1; x'_1, y'_1, z'_1, sont : $\frac{(p-a)(b-c)^2}{a} \cdot \frac{1}{2(R-2r)}$, etc. $\frac{(b-c)^2}{a} \cdot \frac{S}{p^2-3r\delta}$, etc.

On a donc (voir *J. E.*, 1889, p. 150)

$$\overline{FF'}^2 = -\frac{R}{S}\Sigma a(y_1-y_1)(z_1-z'_1).$$

Mais on trouve facilement

$$x_1 - x'_1 = \frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{4(p^2-r\delta)(R-2r)} \frac{(b-c)}{a}(2p-3a),$$

et les valeurs analogues pour $y_1 - y'_1$, $z_1 - z'_1$.

On en déduit

$$\overline{FF'}^2 = \frac{(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2}{b_4S^2(p^2-3r\delta)^2(R-2r)^2}\Sigma a^2(a-b)(a-c)(2p-3b)(2p-3c)$$

et par suite $\overline{FF'}^2 = \frac{(b-c)^2(c-a)^2(a-b)^2}{4(p^2-3r\delta)^2}$

et en supposant $a > b > c$

$$FF' = -\frac{(b-c)(c-a)(a-b)}{2(p^2-3r\delta)},$$

expression que l'on peut mettre sous la forme

$$FF' = \frac{\lambda\mu\nu}{\lambda^2+\mu^2+\nu^2}$$

où n'entrent que les différences des côtés.

La transformation continue en A donne immédiatement

$$F_aF'_a = \frac{(b-c)(c+a)(a+b)}{2[(p-a)^2+3r_a\delta_a]}.$$

Remarques. — Si $2a = b + c$ on a $x_1 = x'_1 = \frac{2}{3}h_a$

FF′ est alors parallèle à BC et l'on a $FF' = \frac{1}{6}(b-c)$.

RAPPEL DE QUESTIONS NON RÉSOLUES

160 (1884) (*). — **Soit N un nombre impair égal à la somme de deux carrés et composé de n facteurs premiers, égaux ou inégaux.**

Le carré de N est :

1° La somme de deux carrés (propriété évidente et connue);

2° La somme de trois carrés;

3° La somme de quatre carrés;

. . . . . .

4° La somme de $(n+1)$ carrés. *(E. Catalan.)*

345 (1889) (**). — **Résoudre les équations**

$$x + y + z + t = 4m,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 4m^2 + 4q^2,$$
$$x^3 + y^3 + z^3 + t^3 = 4m^3 + 16mq^2,$$
$$x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = 4m^4 + 24m^2q^2 + 4q^4 + 4p^4.$$

(Svéchnicoff.)

(*) La question 161, posée au Concours général de 1833, n'a pas été résolue. Elle ne pouvait pas, comme l'a remarqué M. P. Valot dans la note qu'il nous a envoyée, recevoir une solution élémentaire, pour la deuxième partie, du moins. On trouvera, rédigée par celui qui remporta le prix d'honneur en 1833, E. Catalan, la solution de cette question dans les *Nouvelles Annales*, 1845, p. 214.

(**) Les questions 279, 393, 394 sont résolues dans le présent numéro. Nous avons reçu déjà une solution des questions 229, 360.

Il ne reste donc plus à résoudre que les questions 148, 149, 284 (énoncés reproduits dans les numéros de janvier et février), et les questions 160, 445 reproduites ci-dessus.

QUESTIONS PROPOSÉES

745. — Etant donnés trois points M, A, B, démontrer que pour obtenir l'isotomique du conjugué harmonique de M sur AB, on peut appliquer le théorème suivant.

Soient C, C′ les points de la perpendiculaire élevée au milieu de AB, d'où l'on voit AB sous un angle droit; la circonférence passant par C, C′, M coupe AB au point cherché. *(G. L.)*

746. — On considère un triangle ABC; sur AB, un point M et le point μ, isotomique du conjugué harmonique de M relatif au segment AB.

On trace $A\alpha$ perpendiculaire à AC; $B\beta$, à BC; $\alpha\beta$, à AB, au point M.

La perpendiculaire abaissée de O, centre du cercle circonscrit sur $C\mu$ passe par le milieu de $\alpha\beta$. *(G. L.)*

747. — On donne un triangle ABC; en B, on élève BA′ perpendiculaire à BA; en C, CA″ perpendiculaire à CA. On mène, par A, une transversale AA′A″ telle que A soit le milieu de A′A″ et l'on trace $A\alpha$ perpendiculaire à A′A″.

Démontrer que $A\alpha$ et les droites analogues $B\beta$, $C\gamma$ sont concourantes. *(G. L.)*

748. — Soit M le milieu du côté BC d'un triangle ABC, N le milieu de la droite qui joint les pieds des hauteurs issues de B et de C. La droite MN ne passe en A que si le triangle est isoscèle. *(Lucien Lévy.)*

749. — Etant donnés trois plans qui passent par une même droite, construire un trièdre trirectangle qui ait une arête dans chacun des plans donnés. *(Lucien Lévy.)*

Le Directeur Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 11896-6-96.

NOTE

RELATIVE A LA DISTANCE DU CENTRE DU CERCLE CIRCONSCRIT A UN TRIANGLE A SON CENTRE DE GRAVITÉ

Par M. **E.-N. Barisien.**

Voici une solution très simple de cette question bien connue.

Soient ABC le triangle, O le centre du cercle circonscrit, G le centre de gravité de ABC. A′ le pied de la médiane GA, A_1 son point de rencontre avec le cercle circonscrit.

On a

$$(1) \qquad GA.GA_1 = GB.GB_1 = GC.GC_1 = R^2 - d^2,$$

d étant la distance OG, et R le rayon du cercle circonscrit.

Or

$$(2) \qquad GA_1 = GA' + A_1A'.$$

Si $m = AA'$; on a

$$(3) \qquad GA' = \frac{1}{3}m,$$

et

$$AA'.A_1A' = CA'.A'B = \frac{a^2}{4}.$$

Par suite

$$(4) \qquad A_1A' = \frac{a^2}{4m}.$$

En tenant compte de (3) et (4), (2) devient donc

$$GA_1 = \frac{m}{3} + \frac{a^2}{4m} = \frac{4m^2 + 3a^2}{12m}.$$

Mais, on sait que

$$m^2 = \frac{2(b^2 + c^2) - a^2}{4}.$$

Donc

$$(5) \qquad GA_1 = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6m}.$$

De (1) on tire

$$d^2 = R^2 - GA.GA_1 = R^2 - GA_1.\frac{2}{3}m.$$

En y portant (5), on a enfin

$$d^2 = R^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}.$$

Les solutions que l'on donne ordinairement de cette formule, basées sur la trigonométrie, sont sensiblement plus longues. Celle que nous exposons est géométrique.

EXERCICES SUR LES DÉTERMINANTS

Par M. **Elgé.**

1. — Considérons d'abord le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est homogène, du troisième ordre ; il s'annule dans l'une des hypothèses :

$$a = b, \quad b = c, \quad c = a.$$

C'est donc un déterminant de Vandermonde, à un facteur constant près. On propose de lui donner la forme classique du déterminant de Vandermonde.

Pour cela, multiplions les colonnes 1, 2, 3, respectivement par a, b, c; nous avons

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a(b+c) & b(c+a) & c(a+b) \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Multiplions maintenant la première ligne par $a+b+c$ et retranchons cette ligne de la deuxième; il vient

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

La transformation est effectuée et l'on peut écrire

$$\Delta = (a-b)(b-c)(c-a).$$

2. — On propose de calculer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & b^2+c^2 \\ 1 & b & c^2+a^2 \\ 1 & c & a^2+b^2 \end{vmatrix}.$$

C'est encore évidemment un déterminant de Vandermonde; on propose de lui donner la forme classique.

Ce déterminant peut s'écrire

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 + b^2 + c^2 - a^2 \\ 1 & b & a^2 + b^2 + c^2 - b^2 \\ 1 & c & a^2 + b^2 + c^2 - c^2 \end{vmatrix}.$$

On a donc, par application d'une règle connue :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 + b^2 + c^2 \\ 1 & b & a^2 + b^2 + c^2 \\ 1 & c & a^2 + b^2 + c^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

Le premier déterminant a deux colonnes, la première et la troisième, dont les éléments sont proportionnels; il est donc identiquement nul et l'on a finalement

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}.$$

3. — Calculer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & c(b + c) \\ 1 & b & b(c + a) \\ 1 & c & c(a + b) \end{vmatrix}.$$

Ce déterminant est homogène, du troisième ordre; il s'annule pour $a = b$, pour $b = c$, pour $c = a$; c'est un déterminant de Vandermonde.

Pour le reconnaître en lui donnant, comme aux déterminants précédents, la forme classique, observons qu'il peut se mettre sous la forme :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & ab + bc + ca - bc \\ 1 & b & ab + bc + ca - ca \\ 1 & c & ab + bc + ca - ab \end{vmatrix}.$$

On a donc

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & ab + bc + ca \\ 1 & b & ab + bc + ca \\ 1 & c & ab + bc + ca \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}.$$

Le premier déterminant a deux colonnes dont les éléments sont proportionnels; il est donc identiquement nul.

Par suite, on peut écrire

$$\Delta = - \begin{vmatrix} 1 & a & bc \\ 1 & b & ca \\ 1 & c & ab \end{vmatrix}.$$

En multipliant les lignes respectivement par a, b, c, on a finalement

$$\Delta = -\begin{vmatrix} a & a^2 & 1 \\ b & b^2 & 1 \\ c & c^2 & 1 \end{vmatrix}.$$

C'est le déterminant de Vandermonde.

4. — Considérons maintenant le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & b+c & a(b+c) \\ 1 & c+a & b(c+a) \\ 1 & a+b & c(a+b) \end{vmatrix}$$

qui, *a priori*, représente un déterminant de Vandermonde.

On observera que la dernière colonne peut s'écrire :

$$ab + bc + ca - ab,$$
$$ab + bc + ca - bc,$$
$$ab + bc + ca - ca.$$

En appliquant le procédé de calcul employé dans les deux exercices précédents, on mettra Δ sous la forme d'une somme de deux déterminants.

Le premier est identiquement nul.

L'autre est, au signe pris :

$$\begin{vmatrix} 1 & b+c & bc \\ 1 & c+a & ca \\ 1 & a+b & ab \end{vmatrix};$$

c'est le déterminant considéré plus haut (§ 1).

5. — Enfin, soit à calculer

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & b+c & b^2+c^2 \\ 1 & c+a & c^2+a^2 \\ 1 & a+b & a^2+b^2 \end{vmatrix}.$$

Après avoir observé que ce déterminant s'annule pour l'une ou l'autre des hypothèses : $a = b$, $b = c$, ou $c = a$, on voit qu'on a affaire à un déterminant de Vandermonde. Si l'on propose de lui donner la forme classique, on observera que la deuxième colonne peut s'écrire

$$a + b + c - a,$$
$$a + b + c - b,$$
$$a + b + c - c.$$

On sépare Δ en deux déterminants. L'un est identiquement nul; l'autre est le déterminant examiné plus haut (§ 2).

6. — On rattache, de même, le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & b+c & a^2 \\ 1 & c+a & b^2 \\ 1 & a+b & c^2 \end{vmatrix}$$

au déterminant de Vandermonde en observant que la deuxième colonne peut s'écrire

$$a+b+c-a,$$
$$a+b+c-b,$$
$$a+b+c-c.$$

et en décomposant Δ en une différence de deux déterminants dont l'un est identiquement nul.

Cet exercice est même le plus simple parmi ceux qui précèdent; il devrait être proposé tout d'abord.

(A suivre.)

NOTICE HISTORIQUE

SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA MESURE (*)

Par M. **Aubry**

ORIGINES

Sans vouloir émettre l'idée absurde que la géométrie a pris naissance à une époque et chez un peuple déterminés, il est admissible qu'elle a pour première origine le besoin d'embellissement que ressent l'homme dans l'aménagement de sa maison et de ses outils à mesure qu'il se sent délivré des préoccupations immédiates de sa subsistance. Vers la fin de l'époque glaciaire, on voit en effet, chez l'homme primitif, les armes de silex prendre des formes régulières et même élégantes, ainsi que ses instruments d'os et de bois de renne. Ceux-ci se décorent de hachures parallèles ou même croisées, et sont souvent percés de trous. L'architecture rudimentaire des

(*) Cet exposé forme l'ensemble de plusieurs des Notes qui devaient être jointes à une *Histoire du calcul infinitésimal*, quatrième et dernière partie d'un *Essai historique sur l'Analyse mathématique*, dont la première partie, publiée actuellement dans le *J. S.*, a traité de l'histoire de l'Algèbre et de la Théorie des équations. Nous avons pensé que ces notes seraient mieux ici à leur place.

époques postérieures a sûrement donné naissance à la géométrie pratique, mais on n'en a aucune preuve matérielle.

Quoi qu'il en soit, il est vraisemblable que la géométrie tire son origine plus immédiate des figures cabalistiques à l'aide desquelles les prêtres des religions préhistoriques symbolisaient leurs mystères. Et, en effet, chez les anciens, la science était considérée comme une émanation de la Divinité, — on le voit par les mots *théorème*, *théorie*, encore employés aujourd'hui, — et fut toujours jalousement gardée par les prêtres indiens, chinois et égyptiens, jusqu'à des époques historiques assez rapprochées de nous. Les savants ont, du reste, presque toujours, par une tradition inconsciente, aimé à exposer leurs idées en termes énigmatiques.

Par la suite des temps, ces figures se sont probablement compliquées de plus en plus et on fut amené tout naturellement à les disposer régulièrement et à les considérer en elles-mêmes. On peut admettre par exemple que l'on a commencé par la figure d'une droite perpendiculaire au milieu d'une autre droite et que peu à peu, on est arrivé à la considération des figures rectilignes.

Après avoir reconnu la forme des diverses figures rectilignes, l'idée a dû venir de les comparer entre elles. On dut d'abord se rendre compte des relations existant entre les grandeurs de rectangles de bases égales, des cas les plus simples d'égalité des triangles, de la comparaison des parallélogrammes et des triangles avec le rectangle. On se basait sur le principe intuitif de la permanence des formes géométriques, en admettant implicitement qu'une figure reste toujours identique ou superposable à elle-même quand on la déplace. La géométrie a longtemps consisté en des transformations de ce genre, de figures en d'autres équivalentes par un autre arrangement de leurs parties : les Indiens se sont particulièrement adonnés à ce genre de problèmes (voir la note I). Hippocrate de Chio en a tiré l'idée de ses lunules; Euclide leur a consacré tout un livre de ses *Éléments* (voir *J. S.*, 1894, p. 226, et 1895, p. 111); c'est par des moyens analogues que les Arabes, probablement d'après les Indiens, sont arrivés à la résolution des équations du second degré (voir *J. S.*, 1895, p. 128).

On donne généralement, d'après Hérodote, comme origine

de la géométrie le partage des terres sous Sésostris, et la nécessité où se trouvaient les Égyptiens de mesurer leurs terrains après chaque débordement du Nil. On peut, en effet, leur faire honneur de cette découverte, si on entend le mot *géométrie* dans son sens étymologique d'*arpentage :* le papyrus Rhind, unique document qui reste de cette époque, montre les Égyptiens familiarisés avec la pratique de cette dernière science, qui n'était encore, selon toute vraisemblance, que l'ensemble des moyens de mesurer, repérer et diviser les figures les plus simples. Il est, d'ailleurs, présumable que, dès l'aurore des civilisations, l'homme chercha à déterminer par des bornes naturelles, rochers, arbres, etc., le terrain qu'il avait cultivé, et qu'à défaut de ces bornes, l'idée lui vint de se rendre compte à peu près de la situation, de la forme et des dimensions de son champ.

On a probablement été fort longtemps avant de penser à donner des démonstrations du peu qu'on savait. Ces démonstrations nécessitaient des recherches dans une voie toute différente de l'empirisme suivi jusque-là, et d'ailleurs bien plus profondes : c'est au génie grec qu'on est redevable de cette direction scientifique donnée à la géométrie. Pour ne parler que de la géométrie de la mesure dont il est seulement question ici, nous citerons leurs tentatives de la quadrature du cercle. D'après Proclus, Thalès avait bien démontré que le diamètre partage le cercle en deux parties égales ; mais, en cherchant à aller plus loin, ils s'aperçurent que leurs méthodes de transformations, applicables à certaines figures rectilignes, échouaient complètement avec le cercle, et ils cherchèrent des méthodes plus spéciales à ce dernier. Antiphon s'avisa de considérer un polygone régulier inscrit dont le nombre des côtés augmente de plus en plus et conclut que le cercle est un polygone régulier d'une infinité de côtés. Cette conclusion était trop en avance sur l'état de la science pour être admise et surtout pour contribuer à la découverte espérée ; il en restait toutefois cette idée ingénieuse et fondamentale, utilisée depuis par Euclide et Archimède, de substituer à l'étude du cercle celle de polygones à côtés de plus en plus nombreux. Peu après, Hippocrate découvrit ses célèbres

lunules, qui durent faire croire à la solution prochaine du problème; cette découverte montre tout au moins que si on ne savait pas encore prouver que *les cercles sont comme les carrés des diamètres*, — ce qui fut démontré plus tard par Eudoxe, — cette proposition était du moins connue, ainsi probablement que d'autres, sur les démonstrations desquelles on n'avait que des aperçus (voir la note II).

Les premières études des corps solides datent de cette époque. Il était naturel d'étendre aux solides les méthodes de superposition pour essayer de les comparer à des corps plus simples. Mais, — outre que le nombre des solides élémentaires est plus grand que celui des surfaces élémentaires, — dès la pyramide triangulaire, ces méthodes n'étaient plus applicables. Aussi a-t-on dû en chercher de nouvelles, plus scientifiques, et pénétrant plus profondément dans la nature du sujet. On se trouvait en présence de l'infiniment petit, et il paraît certain que les théorèmes d'Euclide et d'Archimède, qui ont fait l'admiration de tous les siècles, ont été d'abord conçus et démontrés à peu près comme nous le ferions aujourd'hui. Euclide, le premier, vivant au milieu des rhéteurs, voulut affranchir de toute objection les bases de la géométrie, et rédigea ces admirables *Éléments*, qui ont tant contribué aux progrès des mathématiques, parce qu'ils constituaient un modèle dont les plus grands géomètres se sont toujours efforcés d'imiter la méthode et la rigueur. C'est dans cet ouvrage qu'on voit les premiers principes de la géométrie de la mesure démontrés rigoureusement : c'est par là que nous commencerons cette étude.

En France, Euclide n'est plus lu ; mais à l'étranger, notamment en Angleterre, en Allemagne et en Italie, il forme toujours la base des études de mathématiques pures. Nous pensons, en conséquence, faire œuvre utile en publiant les extraits d'Euclide et d'Archimède relatifs à notre sujet.

La géométrie de la mesure a d'abord été traitée par la *Méthode d'exhaustion*, puis par celle *des indivisibles* ; nous diviserons notre travail en deux parties, correspondant à ces deux appellations. *(A suivre.)*

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

428 (*). — *Les droites de Newton (joignant les milieux des diagonales) des quadrilatères podaires d'un point quelconque* M *par rapport à un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre* O *sont parallèles entre elles quand* M *décrit la droite* OM.

429. — ABCD *étant un quadrilatère inscrit dans un cercle de centre* O, *l'angle des droites de Newton des quadrilatères podaires de deux points quelconques* M *et* M′ *par rapport à* ABCD, *est égal à l'angle* MOM′.

Cette proposition et la précédente se démontrent par des considérations purement géométriques.

430. — ABCD *étant un quadrilatère inscriptible, les côtés opposés* AB *et* CD *se coupant en* E, AD *et* BC *en* F, *les droites qui joignent les milieux des côtés opposés se coupant en* G, M *étant un point quelconque de la circonférence circonscrite; démontrer les propositions suivantes :*

(*) Au sujet de l'exercice 427 (p. 154), je trouve dans les *Annales scientifiques* de l'École normale supérieure (année 1876) que M. D. André donne les propriétés suivantes :

Le coefficient de x^n dans le développement de $(1+x+x^2+\ldots+x^p)^m$ a pour expression :

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{e^{nix}}\left[\frac{e^{(p+1)ix}-1}{e^{ix}-1}\right]^m dx,$$

ou $i=\sqrt{-1}$.

Les termes équidistants des extrêmes ont des coefficients égaux.

Un coefficient quelconque est égal au coefficient de même rang dans le développement de la puissance $m-1$, plus les coefficients à gauche de celui-ci.

Les coefficients croissent jusqu'au milieu et décroissent au delà.

Si on prend les coefficients de $p+1$ en $p+1$, on obtient une somme constante, quel que soit celui des $p+1$ premiers coefficients par lequel on commence.

La somme de tous les coefficients $=(p+1)^m$.

Si m et n sont premiers entre eux, le coefficient de x^n est divisible par m.

La somme des carrés des coefficients est le coefficient de x^{mp} dans le développement de $(1+x+x^2+\ldots+x^p)^{2m}$.

1° Les bissectrices des angles E *et* F *sont perpendiculaires entre elles.*

2° La droite de Newton du quadrilatère podaire de M, *par rapport à* ABCD, *enveloppe une hypocycloïde à quatre rebroussements, quand* M *décrit la circonférence circonscrite à* ABCD.

3° Le centre de cette hypocycloïde est le point G.

4° Les tangentes aux points de rebroussement sont les parallèles aux bissectrices des angles E *et* F *menées par* G.

5° Les quatre points de la circonférence ABCD, *tels que les droites de Newton de leur quadrilatère podaire soient précisément les deux tangentes précédentes aux points de rebroussement, sont les sommets d'un carré dont les diagonales sont parallèles à ces tangentes, c'est-à-dire aux bissectrices des angles* E *et* F.

On sait que l'hypocycloïde à quatre rebroussements, ou astroïde, est l'enveloppe des droites de longueur constante dont les extrémités décrivent deux axes rectangulaires.

6° La portion de droite de Newton du quadrilatère podaire de M *comprise entre les tangentes aux points de rebroussement est constante et égale au rayon du cercle* ABCD.

Le § 1° se démontre géométriquement d'une façon très simple. Pour les autres propositions, je n'ai qu'une démonstration analytique pénible. Les axes coordonnés les plus commodes sont les parallèles aux bissectrices de E et F passant par G. Une démonstration géométrique serait à désirer (*).

BIBLIOGRAPHIE

Recueil de problèmes de mathématiques, etc..., par M. C.-A. Laisant, docteur ès sciences, repétiteur à l'Ecole Polytechnique; sixième volume. *Géométrie du triangle.* (Librairie Gauthier-Villars et fils; prix 3 francs).

Le sixième volume de cette utile collection vient de paraître; il est consacré à la géométrie du triangle qui forme dans la géométrie élémentaire un groupe bien caractérisé; M. Laisant a pensé, et nous l'approuvons d'avoir eu cette idée, qu'il était préférable de séparer du volume II, celui qui est consacré à la géométrie, les questions relatives à la géométrie du triangle. Je regrette seulement qu'il n'ait pas profité de l'occasion qui se présentait naturellement à lui en écrivant la préface de ce volume, pour faire connaître les sources principales où pourront aller puiser les rensei-

(*) Cette démonstration peut faire l'objet d'une Note que j'insérerai bien volontiers dans le Journal. *G. L.*

gnement nécessaires ceux qui ignorent les principes et la terminologie de cette géométrie.

M. Laisant rappelle, dans cette préface, que la géométrie du triangle a été combattue par les uns, préconisée par d'autres, des deux côtés avec excès. Il est bien évident qu'un ami des mathématiques ne fera pas sa carrière de ce petit coin de la géométrie et qu'il y a, même dans la partie la plus élémentaire de la géométrie, bien d'autres champs de recherches. Ceux qui l'ont le plus aimée n'ont jamais eu cette pensée absurde qu'il fallait pousser vers cette géométrie l'effort des recherches, au détriment de travaux plus élevés et infiniment plus intéressants. Mais, enfin, l'étude des éléments géométriques remarquables qui se rattachent au triangle ne pouvait pas ne pas être faite. Cette étude est achevée aujourd'hui, à l'exception de quelques parties secondaires qui pourront être ultérieurement découvertes ou développées et ceux qui ont collaboré à cette œuvre très modeste, pourtant intéressante et utile, ces *chevaliers du triangle* n'ont pas, je pense, mérité d'être fusillés pour cela.

Parmi les ouvrages récemment parus nous recommandons encore à nos lecteurs.

1° **Compléments du Cours d'algèbre et Notions de géométrie analytique**, à l'usage des candidats à l'École spéciale militaire de Saint-Cyr et des élèves qui se préparent à suivre le cours de mathématiques spéciales (*Math. Élém. A.*), par M. E. Combette, ancien élève de l'École normale supérieure, ancien professeur de mathématiques au lycée Saint-Louis, inspecteur général. 1 vol. in 8°. . . . . 4 fr. (Félix Alcan, édit., Paris.)

2° **Recueil de problèmes d'arithmétique** (3e édition), **450 questions d'arithmologie**; **Précis de trigonométrie rectiligne** (2e édition), par l'abbé Gelin, professeur au collège Saint-Quirin, à Huy (Belgique).

Ces exercices d'arithmétique complètent l'arithmétique qui a été écrite par l'abbé Gelin et à laquelle l'Académie royale de Belgique a décerné, il y a une dizaine d'années, l'un des quatre prix de Keyn. *G. L.*

BACCALAUREATS

BACCALAURÉAT CLASSIQUE (*LETTRES-MATHÉMATIQUES*)
(8 juillet 1896.)

I. — *Problème obligatoire :*

1° Inscrire dans un rectangle donné ABCD un parallélogramme MNPQ. On donne la surface S du parallélogramme et la somme des carrés des côtés, somme que l'on désigne par $2l^2$. On désignera par $2a$ le côté AB; par $2b$ le côté BD; par x la distance du point M au milieu de AB; par y la distance du point N au milieu de BD.

Trouver la condition pour que le problème soit possible.

II. — *Trois sujets à choisir :*

2° Formule des annuités.

3° Définition et propriétés des logarithmes.

4° Somme et produit des termes d'une progression géométrique.

(15 juillet 1876.)

I. — *Problème obligatoire :*

9° Un trapèze isoscèle dont les deux bases sont $2y$ et $2z$ et dont le côté latéral est x est circonscrit à une circonférence de rayon R, sa surface est S. Calculer x, y et z.

II. — *Trois sujets à choisir :*

10° Démontrer que les forces appliquées à un solide peuvent toujours se réduire à deux.

11° Composition des forces concourantes.

12° Théorie du centre des forces parallèles.

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE MODERNE *(LETTRES-SCIENCES)*

(7 juillet 1896.)

Problème obligatoire : Construire une ellipse connaissant son grand axe $2a$ et son excentricité ε. Déterminer sur cette ellipse les points dont la somme des carrés des deux rayons vecteurs est égale à k^2, nombre donné. Indiquer entre quelles limites peut varier le nombre k^2 pour que le problème soit possible, et écrire le système des deux équations qui donnent les coordonnées des points précédents, en prenant pour axes coordonnées les axes de l'ellipse.

Trois questions à choisir : 1° Recherche du centre de gravité de la surface d'un triangle, de celle d'un trapèze et de celle du volume d'un tétraèdre.

2° Mouvement de rotation autour d'un axe fixe. — Vitesse angulaire. — Cas du mouvement de rotation uniforme et expression de la vitesse angulaire en fonction du nombre de tours observés en une minute.

3° Travail d'une force constante en intensité et en direction. — Unité de travail. — Le travail de la résultante est égal à la somme algébrique des travaux des composantes.

Académie de Dijon.

Questions au choix. — 1° Limite de $\frac{\sin x}{x}$ quand n tend vers zéro.

2° Discuter et résoudre l'équation :

$$a \sin x + b \cos x = c.$$

Problème. — Un point mobile M se déplace sur un circonférence de rayon donné R, ayant son centre en O sommet de l'angle droit d'un triangle rectangle OBC dont les côtés OB, OC ont des longueurs données b et c. Exprimer la différence $\overline{CM}^2 - \overline{MB}^2$ au moyen de l'angle x formé par OM avec OB, puis déterminer la position du point M pour laquelle cette différence est maximum ou minimum. Vérifier que pour une telle position la tangente au point M à la circonférence est perpendiculaire à la droite BC.

Questions au choix. — 1° Établir les expressions de sin x et cos x en fonction de tg $\frac{x}{2}$;

2° Établir les relations entre les angles et les côtés d'un triangle quelconque.

Problème. — Rendre calculable par logarithmes l'expression

$$\sin A + \sin B + \sin C, \text{ sachant que } A + B + C = \pi.$$

Questions au choix. — 1° Division d'une droite en moyenne et extrême raison;

2° Lieu des points tels que le rapport de leurs distances à deux points fixes est constant.

Académie de Grenoble.

Questions au choix. — 1° Théorème des moments par rapport à un point pris dans le plan de deux forces concourantes;

2° Composition de deux couples dont les plans ne sont pas parallèles;

3° Centre de gravité de la pyramide triangulaire.

Problème. — On donne un cercle O de rayon R et une tangente AT à ce cercle à l'une des extrémités A d'un diamètre AA'. On mène une corde BC parallèle à AA' à une distance OI $= x$ du centre et les tangentes aux points B et C. Ces tangentes se coupent en un point D et rencontrent AT et AA' aux points EF d'une part, GH de l'autre. On demande : 1° de calculer, en fonction de x, les aires de deux triangles DEF, DHG; 2° de déterminer x de façon que la somme de ces aires soit égale à une aire donnée S.

Questions au choix. — 1° Définition du p. g. c. d. de deux nombres. Sa recherche par la méthode des divisions successives. En déduire que *si l'on multiplie ou si l'on divise deux nombres par un troisième, leur p. g. c. d. est multiplié ou divisé par ce troisième.*

2° Qu'entend-on par mesure d'une grandeur? Par rapport de deux grandeurs de même espèce? Démontrer que le rapport de deux grandeurs de même espèce est égal au rapport des nombres qui les mesurent.

3° Définition et calcul du plus petit multiple commun de deux nombres, soit à l'aide de leur plus grand commum diviseur, soit par la décomposition en facteurs premiers.

Problème. — Sur une droite $x'x$, on donne deux points AB dont la distance est $2a$ et une perpendiculaire Dy menée à une distance OD $= d$ du milieu O de AB. Déterminer sur Dy un point M tel que le rapport de ses distances à A et B soit égal à un nombre donné K. Chercher entre quelles limites d doit être compris, K restant invariable, pour que le problème soit possible; et, dans ce cas, chercher s'il existe une valeur de d pour laquelle la distance MD soit un maximum ou un minimum.

Académie de Lille.

Questions au choix. — 1° Énoncer le théorème des projections; en déduire les formules qui donnent le sinus et le cosinus de la somme de deux arcs.

2° Connaissant tg a, calculer tg $\frac{a}{2}$; montrer comment on peut, géométriquement, prévoir et expliquer *a priori* les résultats du calcul.

3° Résoudre et discuter l'équation

$$a \cos^2 x + b \sin x \cos x + c \sin^2 x = m.$$

Problème. — On considère un point M situé sur une ellipse ayant pour foyers F et F', pour centre O, pour longueur d'axes $2a$ et $2b$. On désigne par $2c$ la distance focale, par ρ et ρ' les rayons FM et F'M', par x la projection du segment OM sur la direction OF.

Académie de Lyon.

Questions au choix. — 1° Résolution de l'équation générale du second degré. Discussion des formules. Relations entre les coefficients et les racines. Nature et signe des racines.

2° Résolution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ quand a est très petit. Calcul de la plus petite racine.

3° Propriétés du trinôme du second degré. Application aux inégalités du second degré.

Problème. — Trouver les valeurs numériques de l'équation :

$$2x^2 + 3x - 3 + \sqrt{2x^2 + 3x + 9} = 30.$$

Académie de Montpellier.

Questions au choix. — 1° Démontrer que si un nombre divise un produit de deux facteurs et est premier avec l'un d'eux, il divise l'autre;

2° Exposer et démontrer la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction ordinaire puisse être réduite en fraction décimale;

3° Définition et extraction de la racine carrée d'une fraction à $\frac{1}{7}$ près par défaut, en supposant connue la théorie de l'extraction de la racine carrée d'un nombre entier à une unité près.

Problème.— Étant donnés sur une sphère, un grand cercle C et le diamètre AB perpendiculaire au plan de ce grand cercle, déterminer sur ce diamètre un point M tel que le double de l'aire plane du petit cercle de la sphère qui a pour centre le point M, augmenté du quintuple de la surface latérale du cône qui a M pour sommet et C pour base, soit égal à $\pi m R^2$ m désignant un nombre donné et R le rayon de la sphère.

On prendra pour inconnue la longueur de l'arête du cône.

Académie de Nancy.

Questions au choix. — 1° Extraire, en exposant la théorie, la racine carrée, à un dixième près, du nombre entier 67;

2° Étant donnée la fraction décimale périodique 0,384 464 646... trouver la fraction ordinaire génératrice. Montrer que cette dernière, réduite à sa plus simple expression, devrait contenir trois facteurs, 2 ou 5, à son dénominateur;

3° Établir la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fraction ordinaire puisse être convertie exactement en décimales.

Problème. — On donne deux points A et A′ dont la distance AA′ est $2a$, et une droite BC faisant avec AA′ l'angle $\varphi = ABC$, et distante du milieu O de AA′ de la longueur $OH = h$. 1° Trouver sur la droite BC un point tel que la somme des carrés de ses distances aux deux points A, A′ soit égale à $10a^2$. Possibilité du problème. 2° Soit M un point répondant à la question : on suppose que le volume engendré par le triangle AMA′, tournant autour de AA′, soit égal à celui d'une sphère de rayon a, et on demande de calculer l'angle φ, connaissant h; puis, de calculer h connaissant φ.

Académie de Poitiers.

Questions au choix. — 1° Résolution d'un système de deux équations du premier degré à deux inconnues;

2° Etablir la formule des annuités;

3° Etant donnée l'équation bi-carrée $(4x^2+3)^2 - 4m^2(x^2+1)(x^2+2) = 0$, où m^2 désigne un nombre positif quelconque, trouver les conditions de réalité des racines. (Pour chacune des questions, les candidats devront faire la discussion.

Problème. — Un tronc de cône dont le côté ou l'apothème est $2c$ est circonscrit à une sphère de rayon a; on lui circonscrit une sphère dont on calculera le rayon. Quelle doit être la valeur de C pour que la surface totale du tronc de cône soit moyenne arithmétique entre les deux sphères?

Question facultative. — Le problème serait-il possible si l'on prenait la moyenne géométrique?

QUESTION 279 (*)

Solution par M. A. Boutin.

4° On a

$$\Sigma \sin^4 A \sin(B-C) + 16 \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{A-B}{2}\sin\frac{C-A}{2}$$
$$\times\left[\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} + \cos\frac{A-B}{2}\cos\frac{B-C}{2}\cos\frac{C-A}{2}\right] = 0.$$

Remplaçons, sous le signe Σ, $\sin A$ par $2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$, $\sin(B-C)$ par $2\sin\frac{B-C}{2}\cos\frac{B-C}{2}$; et remarquons que, dans l'hypothèse considérée, A, B, C étant les angles d'un triangle, en usant des formules classiques et des suivantes :

$$\sin\frac{A-B}{2} = \frac{a+b}{c}\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}},$$

$$\cos\frac{A-B}{2} = \frac{a+b}{c}\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}},$$

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} = \frac{S^2}{abcp},$$

on doit vérifier que

$$(1)\quad 2p\Sigma a^3(b^2-c^2)+a-b)(b-c)(c-a)[abc+(a+b)(a+c)(b+c)]=0.$$

(*) Voir p. 161 la solution des autres parties de cette question.

Mais on a :

$$-\Sigma a^3(b^2-c^2) = (a-b)(b-c)(c-a)\Sigma ab$$

et $$abc + (a+b)(b+c)(c+a) = 2p\,\Sigma ab\,;$$

ce qui montre que (1) est une identité.

QUESTION 489

Solution par M. H. Dellac.

Lemme. — *Sur une circonférence donnée* O, *on porte indéfiniment, à partir d'un point donné* A, *un arc donné* α, *et on joint au centre les points* A, B′, C′, ... *ainsi obtenus. Sur ces rayons on prend les longueurs* OA = r, OB = mr, OC = m²r ... m *étant un nombre donné plus petit que l'unité. On regarde les longueurs* OA, OB, OC, ... *comme des forces partant du point* O, *et on demande la résultante de toutes ces forces.*

Pour obtenir géométriquement cette résultante, je construis le polygone de ces forces. Je prends AB, égal et parallèle à OB, puis BC, égal et parallèle à OC. On obtient ainsi un contour polygonal indéfini dont les côtés décroissent en progression géométrique, et tournent d'un angle constant α. On sait (*J. E.*, t. I, p. 41) que ce contour a pour limite un certain point I du plan, et que la résultante demandée est la ligne OI.

Prenons deux axes rectangulaires OAx et Oy; celui-ci est dirigé du côté où commence le contour. Les coordonnées du point I ont déjà été trouvées, et ici elles sont les composantes de la résultante OI. Je désigne ces composantes par X, Y, par R la résultante et par λ l'angle qu'elle fait avec Ox. On a

$$X = \frac{r(1 - m\cos\alpha)}{1 + m^2 - 2m\cos\alpha}, \qquad Y = \frac{mr\sin\alpha}{1 + m^2 - 2m\cos\alpha},$$

$$R = \frac{r}{\sqrt{1 + m^2 - 2m\cos\alpha}},$$

$$\cos\lambda = \frac{1 - m\cos\alpha}{\sqrt{1 + m^2 - 2m\cos\alpha}}, \qquad \sin\lambda = \frac{m\sin\alpha}{\sqrt{1 + m^2 - 2m\cos\alpha}}.$$

Question 489. — *On donne un cône droit* S, *à base circulaire* O; *sur la circonférence de base on porte indéfiniment, à partir*

du point A, *un arc donné* α, *et l'on joint le sommet* S *aux points* A, B′, C′, ... *ainsi obtenus. Sur ces génératrices on prend les longueurs* SA = l, SB = ml, SC = m^2l ... m *étant un nombre donné plus petit que l'unité.*

1° *On regarde les droites* SA, SB, SC, ... *comme des forces partant du point* S, *et on demande de trouver leur résultante.*

2° *On regarde les droites* AB, BC, CD, ... *comme des forces tirant dans le sens indiqué par l'ordre alphabétique, et l'on demande de trouver la résultante générale de ces forces, le couple résultant de leur translation au point* S, *et la grandeur du couple minimum.*

(H. Dellac.)

Premier cas — Je désigne par r le rayon de base, h la hauteur; on a

$$l^2 = h^2 + r^2.$$

Par le sommet S je mène un plan M parallèle à la base et je projette sur ce plan la circonférence de base. Je remplace la force SA par sa projection SO = h sur l'axe du cône et sa projection Sa = r sur le plan M.

De même je remplace SB par sa projection sur l'axe, Sβ = mh et par sa projection sur le plan M, Sb = mr. En prenant la résultante des projections sur l'axe d'une part, et la résultante des projections sur le plan M, j'aurai les deux composantes de la résultante finale.

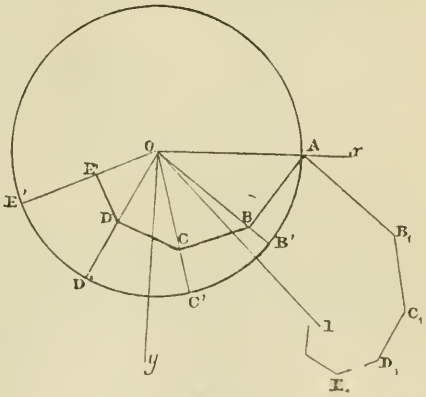


Fig. 1.

Les projections sur la hauteur ont pour somme

$$Z = \frac{h}{1 - m}.$$

Les projections sur le plan M forment la figure du lemme, et donnent une résultante SI, qui fait avec Sx un angle λ, et l'on a

$$SI = \frac{r}{\sqrt{1 + m^2 - 2m \cos \alpha}}.$$

$$\cos\lambda = \frac{1 - m\cos\alpha}{\sqrt{1 + m^2 - 2m\cos\alpha}}, \quad \sin\lambda = \frac{m\sin\alpha}{\sqrt{1 + m^2 - 2m\cos\alpha}},$$

ce qui résout la première partie.

2° Pour obtenir la grandeur et la direction de la résultante générale des forces AB, BC ,... je puis transporter toutes ces forces en un point quelconque de l'espace, et les composer d'après le polygone des forces. Je les transporte au point A, et alors je vois que le polygone des forces est justement le contour ABC...; donc la résultante est la génératrice $AS = l$, résultat indépendant de m. On peut ensuite transporter au point S le point d'application de cette force.

Maintenant cherchons le couple résultant des translations des forces AB, B ;.... au point S. La translation de la force AB donne un couple dont le moment est égal au double de l'aire du triangle SAB. Je désigne par S le double de l'aire du triangle SAB'. Ces deux triangles ayant un angle commun, on a

$$\frac{2.\mathrm{SAB}}{\mathrm{S}} = \frac{ml^2}{l^2} = m.$$

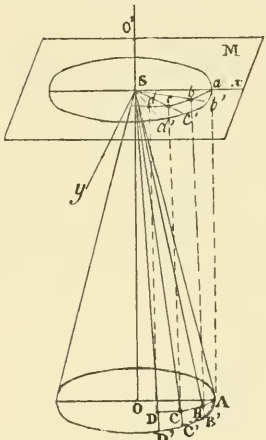


Fig. 2.

Si donc je désigne par t_1 le moment de la force AB par rapport au point S, par t_2 celui de la force BC, etc., j'ai

$$t_1 = m.\mathrm{S}$$
$$t_2 = m^3.\mathrm{S}$$
$$t_3 = m^5.\mathrm{S}$$

On voit que ces moments forment une progression géométrique dont la raison est m^2.

Je mène les axes de ces couples par le point S, sur des droites respectivement perpendiculaires aux faces SAB', SB'C' ,... Ces axes doivent être dirigés à l'extérieur du cône S pour que chaque axe voie le couple tourner dans le sens des aiguilles d'une montre. Je prends donc $\mathrm{SP}_1 = t_1 = m\mathrm{S}$, $\mathrm{SP}_2 = t_2 = m^3\mathrm{S}$ (*). Ces droites font avec le prolongement de SO un angle constant, et, par suite, se trouvent sur un nou-

(*) Ces droites ne sont pas tracées sur la figure 2.

veau cône ayant pour axe ce prolongement et opposé par le sommet au premier.

On est ainsi ramené à trouver la résultante des droites SP_1, SP_2... considérées comme des forces tirant à partir de S. C'est la question du premier cas, sauf que m doit être remplacé par m^2, h et r par les projections h_1, r_1, de SP_1 sur l'axe SO′ et sur le plan M. Les projections sur SO′ ont pour résultante

$$N = \frac{h_1}{1 - m^2}$$

et les projections sur le plan M ont pour résultante

$$G = \frac{r_1}{\sqrt{1 + m^4 - 2m^2 \cos\alpha}}.$$

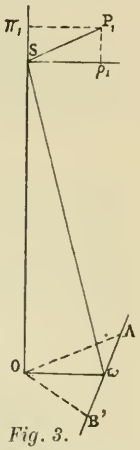


Fig. 3.

Dans le plan M, je prends deux nouveaux axes coordonnés; l'un Sx' est la direction de la projection de SP_1, c'est-à-dire de l'apothème du triangle Sab'; l'autre Sy' est perpendiculaire à Sx' du côté où tombent les projections de SP_2... La résultante G fait avec Sx' un angle λ_1 tel que

$$\cos\lambda_1 = \frac{1 - m^2 \cos\alpha}{\sqrt{1 + m^4 - 2m^2 \cos\alpha}},$$

$$\sin\lambda_1 = \frac{m^2 \sin\alpha}{\sqrt{1 + m^4 - 2m^2 \cos\alpha}}.$$

Pour trouver $h_1 r_1$, je remarque que SP_1 et l'apothème $S\omega$ du triangle SAB′ sont dans un même plan avec l'axe OSO′ et font avec lui des angles complémentaires. Par suite, les triangles rectangles $SP_1\pi_1$, $SO\omega$ sont semblables et donnent

$$\frac{r_1}{h} = \frac{h_1}{O\omega} = \frac{SP_1}{S\omega} = \frac{mS}{S\omega} = mAB' = 2rm \sin\frac{\alpha}{2}.$$

Donc $\quad r_1 = 2mrh \sin\frac{2}{\alpha}, \qquad h_1 = mr^2 \sin\alpha.$

D'où $\quad N = \frac{mr^2 \sin\alpha}{1 - m^2}, \qquad G = \frac{2mrh \sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + m^4 - 2m^2 \cos\alpha}}.$

Si on veut trouver les composantes de G suivant les axes Sx,

Sy, il suffit de remarquer que Sx' fait avec Sx l'angle $\frac{\alpha}{2}$, et de même Sy' avec Sy. On trouve

$$L = \frac{mrh(1 - m^2)\sin\alpha}{1 + m^4 - 2m^2\cos\alpha}, \qquad M = \frac{2mrh(1 + m^2)\sin^2\frac{\alpha}{2}}{1 + m^4 - 2m^2\cos\alpha},$$

et suivant SO

$$N' = -N = -\frac{mr^2\sin\alpha}{1 - m^2}.$$

Pour obtenir la valeur T de l'axe du couple minimum, il suffit de projeter sur la direction SA de la résultante générale l'axe du couple résultant obtenu pour le centre de réduction S, ou bien ses composantes. On obtient

$$T = N'\cos\theta + L\sin\theta,$$

avec $\cos\theta = \frac{h}{l}$, $\sin\theta = \frac{r}{l}$,

et en substituant, on obtient

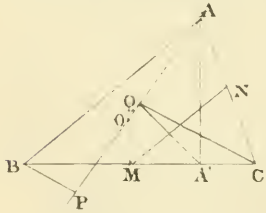
$$T = -\frac{8m^3r^2h\sin\frac{\alpha}{2}\cos^3\frac{\alpha}{2}}{l(1 - m^2)(1 + m^4 - 2m^2\cos\alpha)}.$$

Si on prend pour centre de réduction le point A, ou tout autre point de SA, la résultante générale et le couple résultant ne changent pas.

QUESTION 663

Solution par M. Ernest Foucart.

Dans un triangle ABC, *le pied de la hauteur abaissée de* A *étant* A', *et* P, Q *désignant les projections de* B, C *sur le rayon* AO *du cercle* ABC, *le cercle* A'PQ *a pour centre le milieu de* BC. (Bernès.)



La perpendiculaire au milieu de PQ passe évidemment par le milieu M de BC. D'autre part, le quadrilatère AA'QC étant inscriptible et AC étant diamètre, la perpendicu-laire au milieu N de QA' passe

par le milieu de AC, et l'on a $\widehat{QA'B} = \widehat{QAC} = \widehat{BAA'}$; ce qui établit que QA′ est perpendiculaire à BA. Donc la perpendiculaire au milieu de QA′ est parallèle à BA, et comme elle passe par le milieu de AC, elle passe aussi par le milieu de BC, donc, etc.

Nota. — Solutions diverses par MM. Droz-Farny; E. Leroy, conducteur des Ponts et Chaussées; Goyens: L'Huillier.

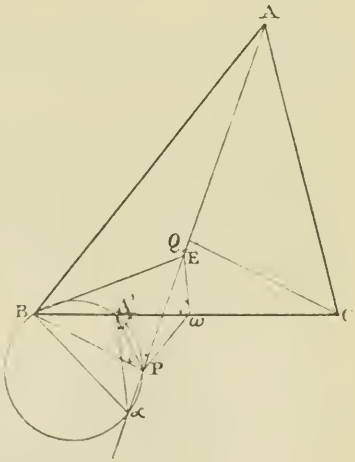
QUESTION 664

Solution par M. L'Huillier.

Par le sommet A *du triangle* ABC, *on trace une droite quelconque* X *sur laquelle on projette* B *et* C *en* P *et* Q; *et* E *étant la rencontre de cette droite avec la médiatrice de* BC, *on porte, sur* X, $E\alpha = EB$ *et on projette* α *en* A′ *sur* BC. *Le cercle* A′PQ *a son centre au milieu de* BC.

Plus généralement, si X, E *et* α *étant définis de même,* A′ *est un point arbitraire de* BC *et* P *et* Q, *les rencontres de* X *avec les deux parallèles menées par* B *et* C *dans la direction définie par* $(BP, X) = (BC, \alpha A')$ *où les angles sont pris en grandeur et signe, à* $K\pi$ *près, le cercle* A′PQ *aura son centre à la rencontre de* BC *et d'une parallèle à* $\alpha A'$, *menée par* E.

(Bernès.)



Nous avons par hypothèse $\widehat{\alpha A'\omega} = \widehat{BPE} = \widehat{B\omega E} = \widehat{CQE}$.

Le quadrilatère $BE\omega P$ est inscriptible, donc

$$\widehat{\omega PE} = \widehat{\omega BE}$$

D'autre part, le quadrilatère $BA'P\alpha$ est inscriptible, et on a

$$\widehat{A'PE} = \widehat{A'B\alpha}.$$

Alors $\widehat{\omega PA'} = \widehat{\omega PE} + \widehat{A'PE} = \widehat{\omega BE} + \widehat{A'B\alpha} = \widehat{EB\alpha}$,

$$\widehat{\omega A'P} = \widehat{E\alpha B}.$$

Le triangle $EB\alpha$ étant isoscèle, on en conclut

$$\widehat{\omega PA'} = \widehat{\omega A'P},$$

donc

$$\omega A' = \omega P.$$

On verrait même que $\omega A' = \omega Q$; donc, etc...

La généralisation demandée est facile à faire.

QUESTIONS PROPOSÉES

750. — Toute symédiane AK d'un triangle ABC rencontre le cercle de Brocard en un second point D, tel que cette symédiane est bissectrice de l'angle BDC, et cet angle BDC est double de l'angle A. *(E. Lauvernay.)*

751. — Étant données deux circonférences O, ω dont l'une passe par le centre ω de l'autre; par l'un des points communs C à ces circonférences, on mène une transversale arbitraire $CA\alpha$, rencontrant la circonférence O en A et la seconde en α, et on mène la droite des centres rencontrant la circonférence ω en deux points, dont l'un D est situé du même côté que ω par rapport à O, on trace ωA, $D\alpha$, qui se rencontrent en E.

1° Démontrer que les lieux des centres des cercles inscrits, des cercles circonscrits aux triangles, tels que $A\alpha E$, sont des circonférences; de même, les lieux des centres de gravité et des orthocentres des triangles $A\alpha E$ sont des circonférences.

2° Montrer que les trois derniers lieux sont coaxaux et que la droite joignant les centres du deuxième et du quatrième lieu est parallèle à la corde commune CB des cercles O et ω.

3° Démontrer que le centre du second lieu est également distant du centre O et du centre de la circonférence circonscrite au triangle ωDE.

4° On joint le point A au second point de rencontre L de la droite αB avec la circonférence O, cette droite AL, la polaire de α par rapport au cercle O et la corde commune BC sont trois droites concourantes.

5° Démontrer que le lieu du centre de la circonférence circonscrite au triangle $AL\alpha$ est une circonférence concentrique au cercle O et que tous les triangles tels que $AL\alpha$ ont même orthocentre. *(E. Lauvernay.)*

752. — Étant données deux circonférences de centres respectifs O, ω, dont l'une passe par le centre ω de l'autre; par les extrémités B et C de leur corde commune on mène les transversales CAB′, BAC′. Le point A étant sur la circonférence O, et B′, C′ sur la circonférence ω.

1° Démontrer que la médiatrice, la médiane et la hauteur relative au côté B′ C′ du triangle AB′C′ passent respectivement par les points fixes ω, P et O (P étant le pôle de BC par rapport à la circonférence O).

2° Montrer que les lieux des centres des cercles circonscrits, des centres de gravité et des orthocentres des triangles tels que AB′C′ sont des circonférences.

3° Dans chacun des triangles variables, ABC, AB′C′, on mène les droites joignant les centres du cercle circonscrit à l'orthocentre correspondant, trouver le lieu de leur point de rencontre.

4° Si les circonférences O et ω sont égales, montrer que le lieu précédent est une droite et trouver le lieu du point conjugué harmonique d'un point quelconque A de l'une, par rapport au diamètre de l'autre passant par A. *(E. Lauvernay.)*

753. — Dans l'espace, les symétriques d'une même figure par rapport à deux droites quelconques sont deux figures directement égales.

Réciproquement, deux positions quelconques d'une même figure dans l'espace sont les symétriques d'une seule et même figure, prises respectivement par rapport à deux droites.

Déduire de la proposition réciproque qu'on peut faire passer une figure d'une première à une seconde position au moyen d'une translation suivie d'une rotation autour d'un axe de même direction (axe du déplacement hélicoïdal). *(G. Tarry.)*

754. — Dans l'espace, si deux figures directement égales ont une droite double sur laquelle les divisions égales formées par les points homologues sont de sens contraires, ces deux figures sont symétriques par rapport à une droite.

Si deux figures inversement égales ont une droite double sur laquelle les divisions égales homologues sont de même sens, ces deux figures sont symétriques par rapport à un

plan ou peuvent être amenées dans cette position par un simple mouvement de translation parallèle.

Si deux figures directement (ou inversement) semblables ont une droite double sur laquelle les divisions semblables homologues sont de sens contraires (ou de même sens), il existe un plan double qui les coupe suivant deux figures planes inversement (ou directement) homothétiques. *(G. Tarry.)*

755. — Dans l'espace, les symétriques d'une même figure, prises respectivement par rapport à trois droites quelconques, sont trois figures directement égales.

Chaque perpendiculaire commune à deux axes de symétrie est l'axe de déplacement hélicoïdal de deux des figures directement égales.

Réciproquement (*), trois positions quelconques d'une même figure dans l'espace sont les symétriques d'une seule et même figure, prises respectivement par rapport à trois droites.

Chaque axe de symétrie est la perpendiculaire commune aux axes de deux des déplacements hélicoïdaux qui amènent les figures données les unes sur les autres. *(G. Tarry).*

756. — ABC est un triangle isoscèle. On abaisse sur la base la perpendiculaire AH. Sur cette droite, on a le centre O du cercle inscrit au triangle ABC et le point D où elle rencontre le cercle circonscrit à ABC.

Démontrer que si AO est double de HD, le triangle ABC est équilatéral. *(Mannheim.)*

(*) Cette réciproque est connue. (Voir *N. A.*, 1882, p. 296.)

RECTIFICATION (*)

735. — On donne une demi-circonférence de diamètre AB et de centre O, et deux points P, Q sur AB. Trouver sur la demi-circonférence un point C tel que le triangle CQP ait un périmètre maximum.

(E.-N. Barisien.)

(*) Nous donnons ici l'énoncé de la question 735 *rectifié*. Celui qui a été publié conduisait à une solution évidente.

Le Directeur-gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 14094-7-96.

SUR LA POLAIRE D'UN POINT

PAR RAPPORT A UNE CONIQUE (*)

Par M. **A. Tissot.**

On peut démontrer par la géométrie élémentaire que cette polaire est une droite, et justifier en même temps la construction suivante :

On joint un foyer au point donné; en ce foyer, on élève une perpendiculaire sur la droite ainsi obtenue; le point où cette perpendiculaire rencontre la directrice correspondante appartient à la polaire. On joint, au foyer, le point d'intersection de la directrice avec la droite qui passe par le centre de la conique et par le point donné; on a ainsi une perpendiculaire à la polaire.

1. — Soient O *(fig. 1)* le centre de la conique, F un foyer, DD′ la directrice correspondante, A un point quelconque du plan; tirons FA et OA; menons FB perpendiculaire à FA jusqu'à son intersection en B avec DD′, et joignons F au point de rencontre C de DD′ avec OA. Il s'agit de démontrer que la perpendiculaire abaissée de B sur FC sera la polaire de A, c'est-à-dire que si l'on mène par A une sécante quelconque AS, et que l'on prenne

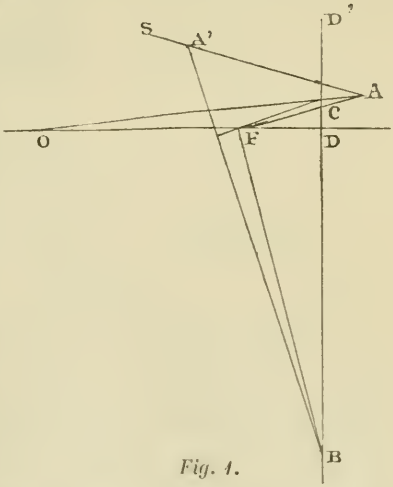


Fig. 1.

(*) Cette Note précède un travail *sur les cercles bitangents aux coniques*, dont toutes les démonstrations sont empruntées à la géométrie élémentaire, et qui repose précisément sur ce que les polaires, dans les coniques, sont rectilignes. Nous commencerons sa publication dans le prochain numéro. (G. L.)

le conjugué harmonique A′ de A par rapport aux extrémités de la corde interceptée, BA′ sera perpendiculaire à FC.

2. — Soient α *(fig. 2)* (*) la projection de A sur l'axe focal FD, et H le point où AS coupe DD′; menons FH′ perpendiculaire à FH, FP à AS, HE à AF, et HG à BF; achevons le rectangle FPHK, et tirons EK

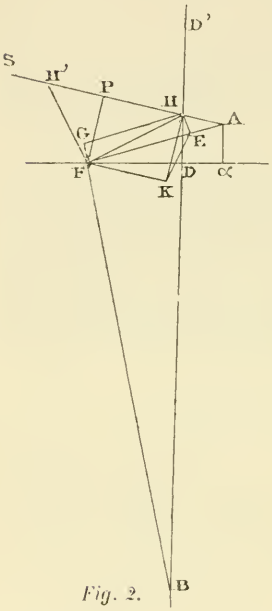


Fig. 2.

Si, sur FH comme diamètre, on décrivait une circonférence, elle passerait en E et en K, d'où l'on conclut l'égalité des angles AFH, EKH; puis, en ajoutant un droit à chacun, celle des angles AFH′, EKF. Mais les angles FAH′. EFK sont aussi égaux. On a donc deux triangles semblables, qui donnent AF.EF = FK.AH′ ou AF.EF = HP.AH′.

Les triangles AFα, BGH sont aussi semblables et donnent AF.GH = Aα.BH ou AF.EF = Aα.BH.

Des deux égalités qui viennent d'être démontrées, on conclut

(1) $$HP.AH' = A\alpha.BH.$$

3. — Soient R *(fig. 3)* le point de rencontre de FP avec DD′, et M celui de OR avec AS; menons MN perpendiculaire à DD′, PL à MN, OI à FP, et IJ à OF. Les deux triangles OIJ, MPL ayant leurs côtés parallèles, les droites OM, IP, JL seront concourantes, et la troisième passera en R. Il suit de là que les rapports de HP à MH et de DJ à OD sont tous deux égaux à celui de LN à MN, et par conséquent égaux entre eux. On a ainsi

(2) $$DJ.MH = OD.HP.$$

(*) Pour éviter la confusion, on a fait quatre figures au lieu d'une; mais les lettres ont dans toutes la même signification.

4. — Le triangle HMR *(fig. 3)* et la transversale ACO donnent

$$AH . CR . OM = MA . CH . OR.$$

Prolongeons LP jusqu'à son intersection Q avec l'axe. Les lignes OM, OR étant proportionnelles aux lignes JL, JR, et celles-ci à JQ, DJ, on aura

$$OR . JQ = OM . DJ.$$

Élevons OT perpendiculaire à l'axe jusqu'à sa rencontre en T avec AS. Les lignes CH, OT sont proportionnelles

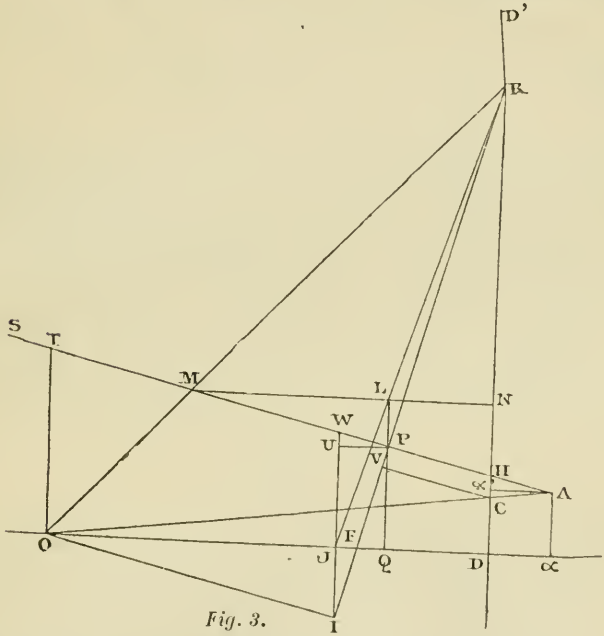


Fig. 3.

aux lignes AC, AO, et celles-ci à Dα, Oα. On a donc aussi

$$O\alpha . CH = D\alpha . OT.$$

Par P, menons une parallèle à l'axe jusqu'à sa rencontre en U avec IJ, et, de C, abaissons, sur FP, la perpendiculaire CV; nous formerons ainsi deux triangles semblables IPU, CRV, qui donneront IP . CV = CR . PU ou

$$IP . CV = CR . JQ.$$

Enfin, prolongeons IJ jusqu'à sa rencontre en W avec AS, et menons Aα′ perpendiculaire à DD′. On aura, par les

triangles semblables AHA′, IPW, $A\alpha'.IW = AH.IP$ ou

$$D\alpha.OT = AH.IP.$$

Si l'on multiplie membre à membre les cinq égalités mises à la ligne dans ce paragraphe, il viendra

$$(3) \qquad O\alpha.CV = MA.DJ.$$

5. — Multiplions aussi membre à membre les égalités (1), (2), (3) et la suivante

$$OD.A\alpha = CD.O\alpha,$$

laquelle est fournie par les triangles $OA\alpha$, OCD; nous obtiendrons

$$(4) \qquad MH.AH'.CV = MA.BH.CD.$$

6. — On sait que le lieu des milieux des cordes parallèles à AS est *une droite* passant par R (*); dans les figures précédentes, M est donc le milieu de la corde interceptée sur AS. On sait aussi que H, H′ sont conjugués harmoniques par rapport aux extrémités de cette corde, de sorte que le carré de la demi-corde est égal à MH.MH′. Ce carré est encore égal à MA.MA′, puisque nous supposons que A′ est le conjugué harmonique de A par rapport aux mêmes extrémités.

Par conséquent, les deux produits sont égaux, et l'on a

$$(5) \qquad \frac{MH}{MA} = \frac{MA'}{MH'}.$$

Deux points conjugués harmoniques par rapport aux extrémités d'un segment sont toujours d'un même côté du milieu de ce segment. Ainsi H, H′ sont d'un même côté de M, et A, A′ pareillement. Si les quatre points sont du même côté de M, la différence entre les numérateurs des deux rapports de l'égalité (5) sera HA′, et la différence entre les dénominateurs correspondants sera AH′. Si M est entre les deux segments, HA′ sera la somme des numérateurs, et AH′ celle des dénominateurs. On aura donc, dans tous les cas,

$$\frac{MH}{MA} = \frac{HA'}{AH'},$$

(*) Voir, pour la démonstration, l'*Étude sur la géométrie élémentaire des sections coniques*, par M. Auguste Morel. (*J. E.*, 1890, p. 78.)

ce qui simplifie l'égalité (4), et la ramène à

$$\frac{HA'}{CD} = \frac{BH}{CV}. \tag{6}$$

7. — Dans le triangle BHA′ *(fig. 4)*, menons deux des hauteurs, A′X et BY; soit Z leur point d'intersection; tirons HZ. Cette ligne devant être la troisième hauteur se trouvera perpendiculaire à BA′. Tirons aussi DV et XY. D'après

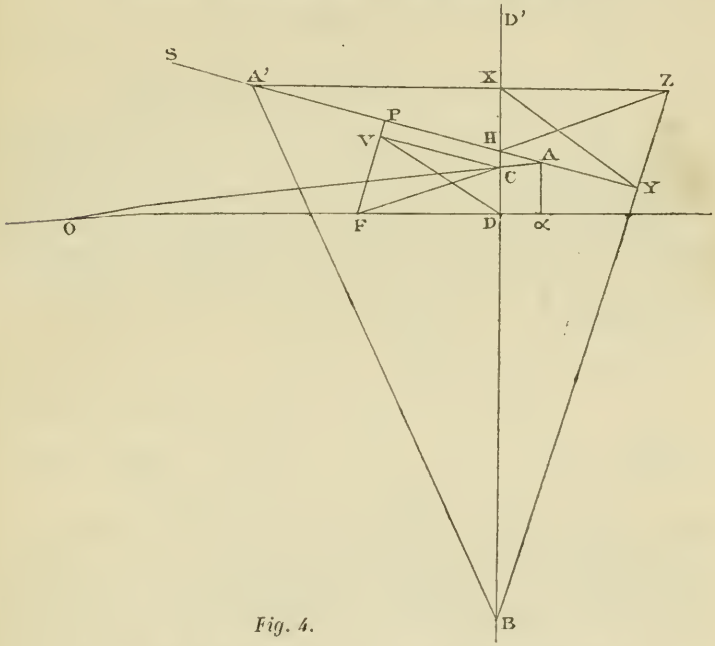


Fig. 4.

l'égalité (6), les angles égaux DCV, A′HB se trouvent compris, dans les triangles de même nom, entre côtés proportionnels; de là résulte la similitude des deux triangles et l'égalité des angles VDC, BA′H. Mais ce dernier est égal à l'angle BXY, parce que le quadrilatère BA′XY est inscriptible dans la circonférence décrite sur BA′ comme diamètre; donc les angles VDC, BXY sont égaux, et les lignes DV, XY sont parallèles. Nous avons ainsi deux quadrilatères CDFV, HXZY qui ont leurs côtés parallèles et une diagonale de l'un paral-

lèle à une diagonale de l'autre; ils sont homothétiques, et les deux autres diagonales FC, HZ seront aussi parallèles; comme la seconde est perpendiculaire à BA′, il en sera de même de la première. Donc BA′ est perpendiculaire à FC.

NOTE

RELATIVE A LA DISTANCE DU CENTRE DU CERCLE CIRCONSCRIT A UN TRIANGLE A SON CENTRE DE GRAVITÉ

Par un **Anonyme.**

Autre solution géométrique (voir page 169).

Soit ABC le triangle, dont les côtés ont pour longueurs a, b, c; appelons G son centre de gravité, H son orthocentre et O le centre du cercle de rayon R circonscrit à ce triangle.

Projetons H en P sur AO et prolongeons ce rayon jusqu'en D où il coupe la circonférence; appelons I le pied de la hauteur AH et J le point où cette droite rencontre la circonférence.

On a OG ou $d = \frac{\text{OH}}{3}$,

$$\overline{\text{OH}}^2 = \text{R}^2 + \overline{\text{AH}}^2 - 2.\text{AO} \times \text{AP}.$$

Mais

$$\overline{\text{AH}}^2 = 4\text{R}^2 - a^2,\ 2\text{AO} \times \text{AP} = \text{AH} \times \text{AJ} = \overline{\text{AH}}^2 - \overline{\text{HI}}^2$$
$$= c^2 - \overline{\text{BH}}^2 = c^2 - 4\text{R}^2 + b^2;$$

donc $\overline{\text{OH}}^2$ ou $9d^2 = 9\text{R}^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$.

Finalement, $d^2 = \text{R}^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{9}$.

EXERCICES SUR LES DÉTERMINANTS

Par M. **Elgé.**

(*Suite*, voir page 170.)

7. — Calculer le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a + b + c & a + b & a + c \\ (a + b + c)(a + b) & (a + b - c)(a + b) & a(a + c) \end{vmatrix}.$$

En retranchant la première colonne des deux autres, on a

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a+b & +c-c & -b \\ (a+b+c)(a+b) & -2c(a+b) & -b(b+c+2a) \end{vmatrix},$$

ou $$\Delta = bc(c-b).$$

8. — Démontrer que le déterminant

$$\Delta = \frac{1}{4}\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dfrac{2c}{a+b-c} \\ \dfrac{2a}{b+c-a} & 1 & 1 \\ 1 & \dfrac{2b}{a+c-b} & 1 \end{vmatrix}$$

est égal à l'unité.

Le calcul direct, comme nous l'avons constaté et comme on pourra le vérifier, est assez pénible; il aboutit bien entendu, mais on lui préférera la méthode suivante.

Posons :

$$b+c-a = u,$$
$$c+a-b = v,$$
$$a+b-c = w,$$

nous aurons

$$\Delta = \frac{1}{4uvw}\begin{vmatrix} w & w & u+v \\ v+w & u & u \\ v & u+w & v \end{vmatrix}.$$

Le déterminant s'annule visiblement quand l'une des quantités u, v, w est nulle; il représente donc le produit uvw, à un facteur constant près. En prenant $u = v = w = 1$, on voit que la valeur correspondante du déterminant est égale à 4.

Finalement, on a $\Delta = 1$.

9. — Démontrer que

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ b+c+d & c+d+a & d+a+b & a+b+c \\ bc+cd+bd & \cdots & \cdots & \cdots \\ bcd & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix},$$

est un déterminant de Vandermonde.

On voit que ce déterminant s'annule quand deux quelconques des letttres prennent des valeurs égales ; Δ est donc, à un facteur numérique près, un déterminant de Vandermonde. Mais, si l'on propose de le transformer pour lui donner *la forme même* du déterminant de Vandermonde, on donne lieu à un exercice de calcul intéressant.

Nous indiquerons seulement la marche que l'on peut suivre pour arriver à ce résultat.

1° On multiplie les colonnes respectivement par a, b, c, d. La dernière ligne est alors formée d'unités ; la première devient a, b, c, d.

2° On multiplie la première ligne par $a + b + c + d$ et on la retranche, cette multiplication une fois faite, de la deuxième. Celle-ci devient a^2, b^2, c^2, d^2.

3° On multiplie la deuxième ligne par $a + b + c + d$: la première, par Σab ; on ajoute la deuxième ligne à la troisième et on retranche, de ce résultat, la première qui a été multipliée comme il a été dit. Le déterminant de Vandermonde apparaît enfin sous sa forme classique.

On pourra généraliser cet exercice en prenant $5, 6, \ldots n$ lettres.

10. — Calculer les déterminants suivants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi & -\sin 2\varphi \\ \cos\varphi & \sin\varphi & \sin 2\varphi \\ \operatorname{tg}\varphi & \operatorname{cotg}\varphi & 1 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & b & a - b \\ 1 & a + b & a + b \\ 1 & a + 2b & \dfrac{(a + b)(a + 2b)}{a} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_3 - \begin{vmatrix} 1 & \mu - \lambda & 3\lambda - 2\mu \\ 1 & \lambda & \lambda \\ 1 & \mu & \dfrac{\lambda\mu}{2\lambda - \mu} \end{vmatrix}.$$

Nous donnerons simplement les résultats, avec une rapide indication sur la marche du calcul.

1° Pour Δ_1 on retranche la deuxième colonne de la première ;

le facteur $\sin\varphi - \cos\varphi$ apparaît dans la première colonne; on le fait sortir et on ajoute la première ligne à la deuxième.

Résultat : $\Delta_1 = -\cos 2\varphi\,(1 + 2\sin\varphi + 2\cos\varphi)$.

2° Retranchez, d'abord, de la troisième ligne la deuxième; le facteur b apparaît; après l'avoir supprimé, retranchez de la deuxième ligne la première.

Résultat : $\Delta_2 = 2ab$.

3° On suit la marche indiquée dans l'exercice précédent; on trouve $\Delta_3 = 2(\mu - \lambda)(2\lambda - \mu)$. Le déterminant Δ_3 se déduit d'ailleurs du précédent, en posant $a + b = \lambda$, $a + 2b = \mu$. On peut ainsi, en partant d'un déterminant *très simple*, et en effectuant une transformation par le changement de la notation, fabriquer en nombre indéfini des déterminants dont le calcul peut être rendu très pénible, mais dont le résultat a le même genre de simplicité que celui qui appartenait au déterminant initial. *(A suivre.)*

NOTICE HISTORIQUE

SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA MESURE

Par M. **Aubry**

(*Suite*, voir page 173.)

MÉTHODE D'EXHAUSTION

Il est hors de doute que les Anciens pensaient, au fond, comme nous au point de vue des infiniment petits; mais — et quelle gratitude ne leur en doit-on pas? — au lieu de bâtir directement des théories sur ce terrain inconnu, ils aimèrent mieux en asseoir solidement les bases à l'aide de méthodes détournées mais inattaquables. Du moins pour les démonstrations, car il est évident pour nous, — comme nous l'avons déjà dit, et même la lecture d'Archimède le prouve, — que leurs propositions ont été découvertes par des voies plus expéditives analogues aux méthodes modernes, sauf à les vérifier ensuite par leurs rigoureuses méthodes de démonstrations. Ces méthodes, d'ailleurs tout à fait synthétiques, ne sont aucunement propres à mener aux découvertes.

La première idée des infiniment petits paraît due aux physiciens et aux astronomes. On peut la voir dans le principe de la divisibilité indéfinie des corps mis en avant d'abord par Zénon d'Élée, et qui résultait probablement de la considération d'objets brisés en fragments de plus en plus petits. Les astronomes, de leur côté, ont dû s'habituer de bonne heure à considérer certaines quantités comme négligeables : par exemple, prendre la terre comme un point dans le ciel et les rayons lumineux émanés d'un astre comme parallèles (*). La théorie des incommensurables, imaginée par Pythagore, et étudiée par Démocrite et Euclide, était l'introduction de cette idée en mathématiques. Un pas en apparence plus direct fut fait par Antiphon (voir plus haut). L'école de Platon, d'où est sortie la théorie des coniques, et qui imagina la construction de la tangente à ces courbes, n'a pas davantage contribué à faire naître la méthode infinitésimale; leur manière de concevoir la tangente ne s'appliquant qu'aux seules coniques, et encore fortuitement, parce que chaque diamètre coupe également leurs ordonnées (**). Aristote émet sur l'infini et sur la continuité quelques considérations qui ne pouvaient non plus donner aucune ouverture directe pour hâter la découverte de la méthode. Il faut arriver jusqu'à Eudoxe et Euclide, qui ont fondé la *méthode d'exhaustion* ou *des limites*.

Le premier principe de cette méthode peut s'exposer ainsi en langage moderne :

(A) *Si deux quantités variables* G, g, *restent toujours proportionnelles en croissant ou décroissant constamment vers deux limites* Q, q, *dont elles peuvent ne différer que de quantités données quelconques, les limites* Q, q *sont dans la même proportion.* Posons

(*) Aristarque de Samos et Ptolémée (*op. cit. J. E.*, 1895, p. 105 et 126) émettent la première de ces propositions. La deuxième est admise par Aristarque qui considère comme un grand cercle de la lune, le cercle séparatif de la lumière et de l'ombre. Archimède adopte la même idée dans son Ψαμμιτὲς, et même dans ses diverses propositions sur les centres de gravité, il considère comme parallèles les directions de la pesanteur. On peut voir aussi Théon de Smyrne, etc.

(**) Nous donnerons prochainement une histoire du problème des tangentes et des *maxima* et *minima*, qui exposera l'origine du calcul différentiel, comme la présente notice développe celle du calcul intégral.

$\frac{G}{g} = \frac{Q}{\alpha}$ et soit d'abord $q > \alpha$. Appelons ε l'excès de q sur α et supposons les deux variables croissantes. Si nous considérons les valeurs G, g telles qu'on ait $q - g < \varepsilon$, ce qui est toujours supposable, comme $G < Q$, on devrait avoir $g < \alpha$, ce qui est impossible, puisque par hypothèse $g > q - \varepsilon = \alpha$. Ainsi on ne peut avoir

$$(\alpha) \qquad \frac{G}{g} = \frac{Q}{\alpha} \quad \text{et} \quad q > \alpha.$$

Soit maintenant $\frac{G}{g} = \frac{Q}{\alpha}$ et $q < \alpha$.

Posons $\frac{\alpha}{Q} = \frac{q}{\beta}$.

Comme $\alpha > q$, on aura

$$\frac{g}{G} = \frac{q}{\beta} \quad \text{et} \quad Q > \beta$$

relations contradictoires d'après (α). La quatrième proportionnelle α à G, g, Q, ne pouvant être ni plus grande, ni plus petite que q, elle lui est égale. C. Q. F. D.

En particulier, *si les valeurs de* G *sont toujours égales à celles de* g, *les deux limites* Q, q *sont égales.*

Par la suite, nous désignerons cette proposition sous le nom de *théorème d'Eudoxe*, bien qu'il ne l'ait pas donné explicitement.

La méthode d'exhaustion s'appuie aussi, souvent, sur ces deux lemmes que nous avons déjà rappelés (*J. S.*, 1894, p. 49 (*).

(*) Nous saisissons cette occasion pour faire une rectification à l'article en question : la première considération directe de la progression décroissante à l'infini et sa sommation appartiennent à Viète. Dans ses *Var. de reb. math. resp.* (Tours 1593), il dit : « *Si fuerint magnitudines continue proportionales : erit ut terminus rationis major ad terminum rationis minorem, ita differentia compositæ ex omnibus et minimæ ad differentiam compositæ ex omnibus et minimæ. Sint magnitudines continue proportionales, quarum maxima sit* D, *minima* X *et composita ex omnibus* F, *et sit ratio majoris ad minorem sicut* D *ad* B. *Dico esse ut* D *ad* B, *ita* F *minus* X *ad* F *minus* D. *At vero cum magnitudines sunt continue proportionales in infinitum abibit* X *in nihilum. Et evanescere asserent Mechanici, cum minima quantitas sub sit tantum intellectu.* » Il convient d'ajouter que les écrits de Viète ont toujours été extrêmement rares avant l'édition, malheureusement incomplète, qu'en a faite Schooten en 1646.

(B) *Si on ajoute un certain nombre de fois une grandeur à elle-même, le résultat finira par dépasser une quantité donnée, si grande qu'on la suppose.* Cet axiome a été signalé par Archimède comme ayant été d'un grand usage chez ses devanciers.

(C) *Si d'une grandeur quelconque, on retire la moitié ou plus de sa moitié, du reste, sa moitié ou plus de sa moitié, et ainsi de suite un certain nombre de fois, le dernier reste sera plus petit qu'une quantité donnée, si petite qu'on la suppose.* Cette proposition se trouve dans Euclide, comme nous l'avons dit *(l. cit.)*

(A suivre.)

EXERCICES DIVERS

Par M. **Aug. Boutin.**

431. — ABCD *étant un carré inscrit dans un cercle de centre* O, *on joint les sommets de ce carré à un point quelconque* M; *ces droites rencontrent respectivement la circonférence en* A′, B′, C′, D′. *Soient* A″, B″, C″, D″, *les pieds des perpendiculaires abaissées de* M *sur les côtés du quadrilatère* A′B′C′D′; P, *le point de concours des diagonales de ce dernier quadrilatère, démontrer que :*

1° O, P, M, *sont en ligne droite.*

2° *Le quadrilatère* A″B″C″D″ *a ses diagonales égales et à angle droit.*

3° A″M, B′M, C″M, D″M, *sont les symétriques des diagonales de* A″B″C″D′ *par rapport aux bissectrices des angles de ce quadrilatère.*

4° *Les droites de Newton des quadrilatères* A′B′C′D′, A″B″C″D″, *sont rectangulaires.*

432. — *On peut considérer un triangle et la tangente en un de ses sommets comme un quadrilatère limite; en prenant alternativement la tangente en chacun de ses sommets, on a ainsi trois quadrilatères limites :* Q_a, Q_b, Q_c. *D'un point quelconque* M *du plan, on abaisse des perpendiculaires sur les côtés de* Q_a, *les pieds de ces perpendiculaires sont les sommets d'un quadrilatère* P_a *podaire* M; P_b, P_c *étant des quadrilatères podaires analogues de* M,

par rapport à Q_b, Q_c; *soient* N_a, N_b, N_c, *les droites de Newton de* P_a, P_b, P_c; *démontrer les propositions suivantes :*

1° N_a, N_b, N_c, *concourent en un même point* ν.

2° Ces droites forment entre elles des angles égaux à ceux du triangle ABC.

3° Si E *est le point de concours des droites de Simson des points où* OM *rencontre la circonférence circonscrite à* ABC, *(*O *centre de cette circonférence), le point* ν *est le milieu de* ME.

4° M′ *étant le symétrique de* M *par rapport à* O, N'_a, N'_b, N'_b *des droites analogues à* N_a, N_b, N_c; N'_a *et* N_a *sont parallèles ;* N *et* N_b, N'_c *et* N_c *le sont également.*

Cette propositton peut être généralisée de la manière suivante :
R étant un point quelconque du plan du triangle et R_a, R_b, R_c, les droites de Newton des quadrilatères podaires de R, par rapport à Q_a, Q_b, Q_c, on a

$$\text{angle}(N_a, R_a) = \text{angle}(N_b, R_b) = \text{angle}(M_c, R_c) = \widehat{MOR}.$$

433. — *Sur une corde* M_1M_2 *d'une hyperbole équilatère comme diamètre, on décrit une circonférence ; celle-ci ne coupe la courbe en deux points réels que si* M_1 *et* M_2 *appartiennent à des branches différentes ; en ce cas,* M_3 *et* M_4 *étant les autres points d'intersection,* M_3M_4 *est un diamètre de l'hyperbole.*

2° M_1M_2 *se déplaçant parallèlement à elle-même,* M_3 *et* M_4 *restent fixes.*

3° M_1M_2 *et* M_3M_4 *sont antiparallèles par rapport aux asymptotes de l'hyperbole.*

434. — AA′ *étant un diamètre fixé d'un cercle,* MM′ *un diamètre mobile ; le lieu des foyers des ellipses inscrites ou circonscrites au rectangle* AMA′M′ *est une lemniscate.*

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE MODERNE

(LETTRES-SCIENCES)

(7 juillet 1896.)

Académie de Caen.

Questions au choix : 1° Racine carrée d'un nombre entier à moins d'une unité. — Théorie.

2° Mener les tangentes à une ellipse par un point P non situé sur la

courbe : condition de possibilité. Lieu des points P tels que les tangentes obtenues soient rectangulaires.

3° Révolutions sidérales et synodiques de la lune. Établir une relation entre leurs durées et celle de l'année.

Problème. — Étant donnée une demi-circonférence de rayon R, limitée par un diamètre AB dont le milieu est en O, par un point S pris sur le prolongement du rayon OA, on mène une tangente ST à la demi-circonférence.

En faisant tourner la figure autour de BS, la droite ST engendre la surface latérale d'un cône, l'arc TB une zone. Déterminer la longueur OS de telle sorte que l'aire de la surface conique ajoutée au quintuple de l'aire de la zone donne une somme connue $2\pi Rm$. Discussion suivant les diverses valeurs attribuées à m.

Académie de Rennes.

Questions au choix : 1° Théorie des diviseurs communs à deux nombres déduite de la division. Définition de deux nombres premiers entre eux. Deux pareils nombres étant donnés, par quels facteurs faut-il multiplier l'un pour avoir des produits divisibles par l'autre ?

2° Inégalités du second degré. Définition et propriétés des logarithmes vulgaires.

Problème. — Dans le plan d'un rectangle dont $AB = 2a$, $AB' = 2a'$ sont les côtés on prend un point C tel que les angles BAC, BA'C aient la même valeur α. Calculer ses distances aux quatre côtés. Il y a entre elles trois relations indépendantes de α, les indiquer. Calculer les angles CBA, CB'A en fonction de α et des cotés ainsi que les rapports de distance C à deux des sommets opposés.

Académie de Toulouse.

Questions au choix : 1° Inégalité des jours et des nuits;

2° Mesure du temps. Jour solaire vrai. Jour solaire moyen.

3° Lois de Kepler. Inégalité des saisons.

I. *Questions au choix :* 1° Plus courte distance de deux droites. Cas particulier où l'une de ces droites n'est autre que la ligne de terre ;

2° Dans un plan dont les traces font 45° avec la ligne de terre, on place un cercle de $0^m,03$ de rayon et tangent à la fois aux deux traces. Déterminer les projections de ce cercle ;

3° On donne une pyramide hexagonale régulière reposant par sa base sur le plan horizontal, et l'on demande la section faite dans cette pyramide par le plan bissecteur de l'un des dièdres à la base.

II. *Problème.* — Étant donnés un angle droit POQ et une droite OR faisant 30° avec OQ, on demande comment il faut placer une droite AB de longueur donnée a dans l'angle POR pour que le tronc de cône qu'elle engendre en tournant autour de OQ ait une surface latérale donnée m^2. Maximum de cette surface.

I. *Questions au choix* : 1° Définition et propriétés du trièdre supplémentaire d'un trièdre donné ;

2° Étant donnée une sphère solide, trouver son rayon par une construction plane ;

3° Volume d'un segment sphérique.

II. *Problème.* — Par un point donné M, à l'intérieur d'un angle XOY $= \alpha$ et à distances a et b des côtés OX, OY, mener une droite AB telle que le produit AM $\times$ MB ait une valeur donnée K^2. — On prendra pour inconnue l'angle x que le côté OX fait avec AB.

Examiner si la question comporte un maximum ou un minimum pour K^2, donner l'expression de ce maximum ou de ce minimum, ainsi que celle de l'angle x qui lui correspond.

Questions au choix : 1° Réduction à trois, puis à deux, des forces en nombre quelconque appliquées à un corps solide;

2° Définir la vitesse à un instant donné dans un mouvement varié quelconque. Appliquer au mouvement déterminé par la relation $e = at^2$ dans laquelle a est une constante, e l'espace parcouru au bout du temps t;

3° Relation entre les moments de deux forces concourantes et celui de leur résultante par rapport à un point pris dans le plan des deux forces.

II. *Problème.* — On donne dans un triangle un côté a, l'angle opposé A et le rayon r du cercle inscrit. Calculer les angles B et C.

Académie de Besançon.

I. Un vase de forme polyédrique a pour base un rectangle dont les côtés sont a et b, la hauteur du vase est h; il se termine à un rectangle parallèle à la base, ayant pour côtés $a + h$ et $b + h$; les centres des deux rectangles sont sur la même verticale. Évaluer le volume.

II. Maximum et minimum de la fraction

$$\frac{x^2 + 1}{(x - 1)(x - 2)}.$$

III. Étant données, dans le plan horizontal, deux droites, AB et CD, les droites AB et CD, sont les bases de deux triangles équilatéraux verticaux; on demande la longueur de la droite qui joint les sommets.

Questions au choix ; 1° Composition et décomposition des couples.

2° Réduction d'un système de forces à une force et à un couple.

3° Conditions d'équilibre d'un corps mobile autour d'un axe fixe.

II. *Problème.* — Soient deux droites AB $= 2r$, CD $= 2R$ perpendiculaires en leurs milieux à la droite OO′ qui joint ces milieux; on mène les droites AC, AD, BC, BD et on fait tourner la figure autour de OO′.

1° Evaluer le volume engendré par le triangle BID.

2° Trouver la relation qui doit exister entre R et r pour que l'on ait :

$$\text{Vol. BID} = \text{Vol. OIB} + \text{Vol. O'ID}.$$

3° Étudier la variation du rapport

$$\frac{\text{Vol. BID}}{\text{Vol. OIB} + \text{Vol. O'ID}}$$

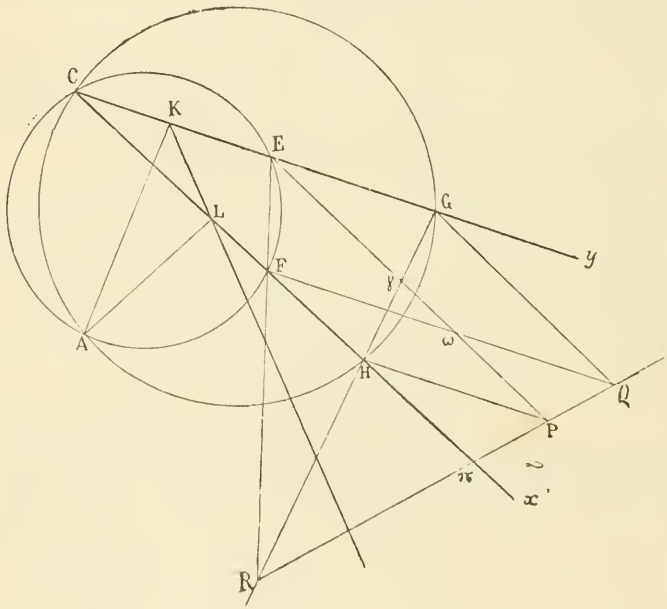
lorsque $\frac{R}{r}$ varie, et trouver le maximum de ce rapport ainsi que la forme correspondante de la figure ABDC.

QUESTION 229

Solution par M. H. L'Huillier.

On donne, dans un plan, un angle xCy *et un point* A. *Par les points* A, C, *on fait passer deux circonférences. Soient* E, F, *puis* G, H *les points où elles coupent, respectivement, les côtés de l'angle. Sur* CE *et* CH, *on construit le parallélogramme* ECHP. *Sur* CF *et* CG, *on construit le parallélogramme* FCGQ. *Cela posé : 1° la droite* PQ *est perpendiculaire à la droite de Simson, relative aux données; 2° elle passe au point de concours des cordes* EF, GH. (Catalan.)

1° Les triangles AEG, AFH sont semblables (trois angles égaux), alors $\frac{AE}{AF} = \frac{EG}{FH} = \frac{\omega Q}{\omega P}$.



Soit KL la droite de Simson, relative au point A; les triangles AKL, AEF sont semblables (trois angles égaux),

on a : $\frac{AE}{AF} = \frac{AK}{AL}$, donc $\frac{AK}{AL} = \frac{\omega Q}{\omega P}$.

Les triangles AKL et ωQP sont semblables, et comme ωP, ωQ sont respectivement perpendiculaires aux droites AK, AL on voit que PQ est perpendiculaire à KL.

2° On voit immédiatement sur la figure que

$$\frac{F\varpi}{FH} = \frac{Q\varpi}{QP} = \frac{GH}{G\gamma} = \frac{CH}{E\gamma} = \frac{EP}{E\gamma}.$$

Les trois droites FE, HG, PQ partageant les deux parallèles Cx et EP en parties proportionnelles, concourent en un certain point R.

QUESTION 360

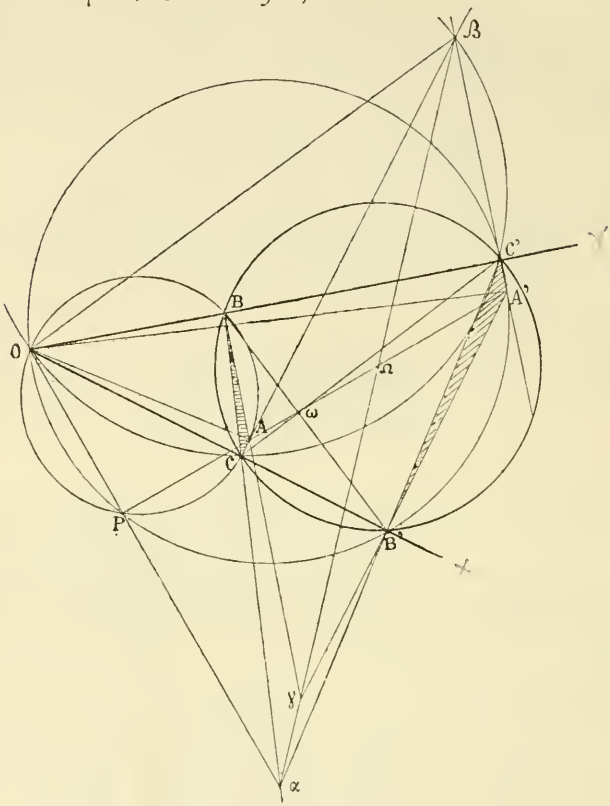
Solution par M. H. L'Huillier.

Si les droites OA, OA′ *sont symétriques par rapport à la bissectrice de l'angle* XOY, *et si* B, C, B′, C′ *sont les projections de* A, A′ *sur* OX, OY : *1° les perpendiculaires abaissées des points de concours des côtés homologues, sur les droites joignant les sommets opposés, concourent en un même point ; 2° les triangles* ABC, A′B′C′ *sont en perspective.* (B. Sollertinsky.)

1° Les droites OA, OA′ étant isogonales, les points B, C, B′, C′ sont sur une circonférence Δ dont le centre est au milieu Ω de AA′. Soit P le second point commun aux circonférences circonscrites aux quadrilatères OABC, OA′B′C′. La ligne de leurs centres est perpendiculaire au milieu de OP ; les points A, A′ étant diamétralement opposés à O dans ces circonférences, il en résulte que AA′ passe par P où elle est perpendiculaire à OP. D'autre part, les droites OP, BC, B′C′ (axes radicaux de trois cercles) concourant en α, OP est la polaire du point de rencontre ω des droites BB′, CC′ par rapport à Δ. Donc la perpendiculaire AA′ menée de Ω, sur OP, passe par le point ω. Now se[illegible]

2° Soit β le point d'intersection de AC et de A′C′. Traçons Oβ ; le quadrilatère OCC′β est inscriptible. On voit faci-

lement sur la figure que $\widehat{COC'} = \widehat{C\beta C'}$, $\widehat{BB'C} = \widehat{BC'C} = \widehat{C\beta O}$ d'ailleurs $\widehat{C'\beta O} + \widehat{OB'B} = 90^\circ$;



donc $\widehat{\beta OB'} + \widehat{OB'B} = 90^\circ$,

et BB′ est perpendiculaire sur Oβ.

Les trois droites AA′, BB′, CC′, concourent donc au point ω.

QUESTION 642

Solution par M. H. L'Huillier.

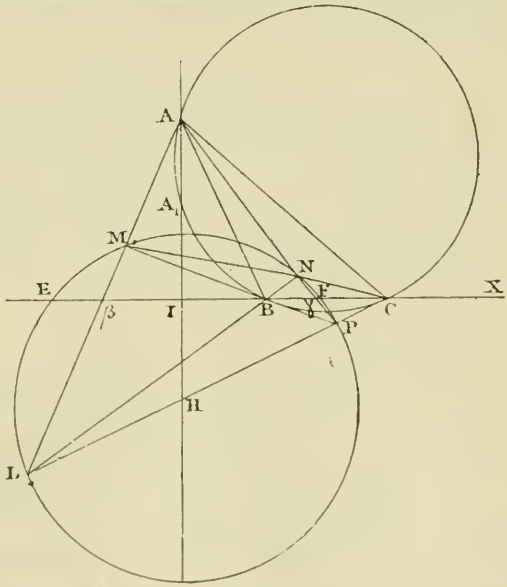
On donne un angle droit AIX *et, sur l'un des côtés, un point fixe* A. *Sur* IX, *on considère deux points variables* B, C, *tels*

que IB.IC = K. *1° Démontrer que l'orthocentre du triangle variable* ABC *est fixe. 2° Trouver le lieu du centre du cercle* ABC. *3° Faire voir que pour chaque position de* ABC, *où l'un des angles est obtus, il y a une infinité de quadrilatères inscriptibles où les diagonales et les côtés opposés se coupent aux trois sommets de* ABC, *et que tous ces quadrilatères sont inscrits dans un même cercle qui reste invariable quand* B *et* C *varient.* (Bernès.)

1° Le cercle circonscrit au triangle ABC coupe IA au point fixe A_1 déterminé par la relation $IA.IA_1 = K$. L'orthocentre H symétrique de A_1 par rapport au pied I de la hauteur est un point fixe.

2° Le lieu du centre du cercle ABC est évidemment la perpendiculaire à OA passant par le milieu de AA_1.

3° Menons par A deux droites conjuguées harmoniques par rapport aux droites AB.AC, puis par C deux droites conjuguées harmoniques par rapport à CA.CB; nous obtenons ainsi un quadrilatère LMNP dont les diagonales se coupent évidemment en B. Si nous avons pris les droites issues de C telles que leur bissectrice soit perpendiculaire à celle des droites issues de A, le quadrilatère LMNP est inscriptible. Le cercle circonscrit est alors conjugué par rapport au triangle ABC. Son centre est l'orthocentre H du triangle ABC et il passe par



les points doubles de l'involution déterminée sur IX par B et C quand ces points varient; donc il est invariable.

Un des angles du triangle ABC doit être obtus, puisque le cercle conjugué d'un triangle acutangle est imaginaire.

QUESTION 643

Solution par M. G. Tzitzéica.

ABCD *étant un quadrilatère inscriptible et* M, P, Q *les points de concours des côtés opposés ou des diagonales, les puissances des trois points* M, P, Q *relativement au cercle* ABCD *sont inversement proportionnelles aux coordonnées barycentriques relativement au triangle* MPQ *de l'orthocentre de ce triangle. En conclure que les deux cercles* MPQ, ABCD *ont pour axe radical l'axe orthique du triangle* MPQ. (Bernès.)

On sait que le triangle MPQ est conjugué par rapport au cercle ABCD. Il en résulte que O est l'orthocentre de ce triangle. Soient u, v, w les puissances de M, P, Q par rapport au cercle ABCD, et H le pied de la hauteur sur PQ du triangle MPQ. On sait que les cercles ADP, ABQ passent par H (1894, p. 160). On a donc

$$QH.QP = QC.QB = w, \qquad PH.PQ = PC.PD = v,$$

d'où

$$\overline{PQ}^2 = v + w.$$

On a de même

$$\overline{MP}^2 = u + v, \qquad \overline{MQ}^2 = u + w,$$

donc

$$u = \frac{\overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2 - \overline{PQ}^2}{2}; \cdots$$

Or

$$\overline{PQ}^2 = \overline{MQ}^2 + \overline{MP}^2 - 2MP.MQ \cos M,$$

d'où

$$\frac{\overline{MP}^2 + \overline{MQ}^2 - \overline{PQ}^2}{2} = MP.MQ \cos M,$$

de sorte que

$$u = MP.MQ.PQ \cdot \frac{\cos M}{PQ} = \frac{MP.MQ.PQ}{2R} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} M},$$

de même

$$v = \frac{MP.MQ.PQ}{2R} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} N}, \qquad w = \frac{MP.MQ.PQ}{2R} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} P},$$

d'où $$u \operatorname{tg} M = v \operatorname{tg} N = w \operatorname{tg} P.$$

Or, les coordonnées barycentriques λ, μ, ν de l'orthocentre sont précisément $\operatorname{tg} M$, $\operatorname{tg} N$, $\operatorname{tg} P$; donc

$$\lambda u = \mu v = \nu w,$$

ce qui justifie la première partie. Si l'on prend le triangle MPQ pour triangle de référence, l'axe radical des cercles MPQ et ABCD a pour équation

$$(1) \qquad \alpha u + \beta v + \gamma w = 0,$$

u, v, w ayant la signification précédente. Or, (1) c'est la droite harmoniquement associée au point $\frac{1}{u}$, $\frac{1}{v}$, $\frac{1}{w}$ ou $\operatorname{tg} M$, $\operatorname{tg} N$, $\operatorname{tg} P$.

C'est donc l'axe orthique.

QUESTION 674

Solution par M. Ernest Foucart.

Démontrer que

$$\frac{2 \sin \alpha + \sin 3\alpha - \sin 5\alpha}{2 \cos \alpha - \cos 3\alpha - \cos 5\alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

(E.-N. Barisien.)

On a

$$\sin 3\alpha - \sin 5\alpha = -2 \sin \alpha \cos 4\alpha,$$
$$\cos 3\alpha + \cos 5\alpha = 2 \cos \alpha \cos 4\alpha.$$

Donc

$$\frac{2 \sin \alpha + \sin 3\alpha - \sin 5\alpha}{2 \cos \alpha - \cos 3\alpha - \cos 5\alpha} = \frac{2 \sin \alpha}{2 \cos \alpha} \cdot \frac{1 - \cos 4\alpha}{1 - \cos 4\alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Nota. — Solutions diverses par MM. Droz-Farny, Goyens, N. Plackowo.

QUESTIONS PROPOSÉES

757. — Soit AB la corde polaire d'un point M par rapport à une parabole P. Montrer que la droite qui unit le sommet de P à la projection de M sur la directrice de P, passe par l'orthocentre du triangle MAB. *(E.-N. Barisien.)*

758. — On considère un triangle AOB dont les côtés OA, OB sont pris pour axes; on pose OA $= a$, OB $= b$, AOB $= \theta$ et l'on demande de construire la droite qui correspond à l'équation

$$\frac{x - y\cos\theta}{a} + \frac{y - x\cos\theta}{b} = \sin^2\theta \text{ (*)}.$$ *(G. L.)*

759. — On donne une parabole P et une droite D perpendiculaire à son axe. Soient M un point quelconque de D et AB la corde polaire de M par rapport à P. Montrer que les triangles MAB ont leur orthocentre situé sur une droite fixe parallèle à D, et que leur centre de gravité décrit une parabole. *(E.-N. Barisien.)*

760. — Étant donné un cercle C, de rayon R, d'un point A de la circonférence comme centre on décrit un cercle C′ de rayon R′ qui rencontre C en P et P′, et un cercle C″ de rayon R″ qui rencontre C en Q et Q′. Calculer les aires des triangles APQ et APQ′ en fonction de R, R′, R″. *(E.-N. Barisien.)*

761. — Soient M et M′, deux points d'une parabole, symétriques par rapport à son axe. La parallèle à l'axe, menée par M′, rencontre en I la normale en M. Le cercle de centre I et de rayon IM rencontre la parabole en deux autres points P et Q. Montrer que les droites MP et MQ sont inclinées à 45° sur l'axe de la parabole. *(E.-N. Barisien.)*

(*) Je donne cette question comme exercice de *géométrographie*. J'ai adressé à M. Lemoine deux solutions qu'il voudra bien comparer avec celles que les correspondants du journal m'enverront et que je lui communiquerai. Il est bon, je crois, que le goût de la simplicité dans les constructions géométriques se développe. A cela peuvent servir des énoncés du genre de celui que nous proposons ici.

On pourra chercher des constructions n'exigeant que la règle et l'équerre; ou s'accorder le compas.

762. — Un angle droit xOy est coupé par deux droites parallèles AA′ et BB′. (A, B sont sur Ox; A′, B′ sur Oy.) La perpendiculaire abaissée de O sur la direction des parallèles considérées rencontre : AA′ en P; BB′ en Q; on suppose B′Q = AO.

Démontrer que si l'on prend, sur Ox, OH = QB, on a

$$\operatorname{tg} \widehat{HA'O} = \operatorname{tg}^3 \widehat{AA'O} \qquad \textit{(E.-N. Barisien.)}$$

763. — Le centre du cercle orthogonal aux trois cercles exinscrits à un triangle T est distant du centre du cercle des neuf points du même triangle T de la longueur

$$\frac{1}{2}\sqrt{R(R-2r)} \qquad \textit{(E.-N. Barisien.)}$$

764. — On considère un quadrilatère ABCD dont l'angle C est droit et dans lequel CA = CB. Les droites AC et BD se rencontrent en E, et les droites BC et AD se rencontrent en G.

On sait que, quel que soit ABCD, les cercles circonscrits aux triangles BEC, AED, BDG et ACG se coupent au même point F, foyer de la parabole inscrite au quadrilatère. Démontrer que le cercle passant par les milieux de BE, AE et AG passe aussi par le point F. *(E.-N. Barisien.)*

765. — La droite de Simson relative à un point quelconque M de la circonférence circonscrite à ABC rencontre le cercle d'Euler en P et Q, P étant le milieu de MH. Si A′ est le milieu du segment AH, le triangle formé par les droites PQ, AH, A′Q est isoscèle. *(E. Foucart.)*

766. — Soit F le foyer d'une parabole tangente en A et B aux côtés de l'angle AMB. Si O est le milieu de AB, démontrer la relation

$$2MO(FA + FB) = \overline{MA}^2 + \overline{MB}^2.$$

(E. Foucart.)

767. — Démontrer que les deux équations

$$(1)\quad \begin{cases} bx^2 \sin\varphi - 2axy\cos\varphi + \dfrac{y^2}{b\sin\varphi}[(a^2+b^2)\sin^2\varphi - b^2\cos^2\varphi] \\ \qquad + 2y(a^2+b^2)\cos 2\varphi = 0, \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} ay^2\cos\varphi - 2bxy\sin\varphi + \dfrac{x^2}{a\cos\varphi}[(a^2+b^2)\cos^2\varphi - a^2\sin^2\varphi] \\ \qquad\qquad - 2x(a^2+b^2)\cos 2\varphi = 0, \end{cases}$$

résolues par rapport à x et y, ont pour solutions

1° $x = 0$, $\quad y = 0$;

2° $x = 2a\cos\varphi$, $\quad y = 2b\sin\varphi$;

3° $x = \dfrac{2ab^2\cos\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}$, $\quad y = \dfrac{2a^2b\sin\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}$;

4° $x = \dfrac{2a(a^2-b^2)\sin^2\varphi\cos\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}$, $\quad y = \dfrac{-2b(a^2-b^2)\sin\varphi\cos^2\varphi}{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}$;

et que l'élimination de φ entre les équations (1) et (2) donne

$$(x^2+y^2)(b^2x^2+a^2y^2-4a^2b^2)[(x^2+y^2)^2-4(a^2x^2+b^2y^2)]$$
$$[(x^2+y^2)^2(b^2x^2+a^2y^2)-4(a^2-b^2)^2x^2y^2] = 0.$$

(E.-N. Barisien.)

768. — On considère un triangle et ses trois cercles exinscrits. Les tangentes communes extérieures à ces trois cercles forment trois groupes de deux tangentes. Les triangles formés par trois tangentes d'un groupe différent sont au nombre de 8. Un seul de ces huit triangles contient les cercles exinscrits en son intérieur.

1° Montrer que le rayon ρ du cercle inscrit à ce dernier triangle est égal au rayon r du cercle inscrit au triangle donné augmenté du diamètre $2R$ de son cercle circonscrit.

2° Si S est l'aire du triangle donné, Σ celle du triangle formé par les centres des trois cercles exinscrits, on a la relation $\dfrac{\Sigma}{S} = \dfrac{\rho}{r} - 1$. *(E.-N. Barisien).*

Nota. — Je prie les personnes qui me font l'honneur de m'écrire ou de me proposer quelque travail de vouloir bien donner leur nom et leur adresse. J'ai dû déchirer récemment plusieurs notes que je n'ai pu renvoyer à leurs auteurs, faute de savoir où les trouver.

Les travaux anonymes ne sont pas insérés; à moins, ce qui est le cas d'une note du présent numéro, que l'auteur ne me soit connu. Il y a des cas où il est très naturel qu'une personne désire que son nom ne soit pas publié; mais il faut que je puisse, si l'article l'exige, entrer en communication avec l'auteur. G. L.

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 15864-8-96.

SUR LES CERCLES BITANGENTS AUX CONIQUES

Par M. **A. Tissot.**

La présente note a pour objet de démontrer géométriquement, sur ces cercles, les propriétés déjà connues, et d'autres qui sont nouvelles.

1. *Tout point de la droite des contacts d'une conique avec un cercle bitangent a la même polaire par rapport à la conique et par rapport au cercle.*

En effet, quelle que soit celle des deux courbes par rapport à laquelle on la prenne, la polaire du point considéré contiendra le conjugué harmonique de ce point par rapport aux deux points de contact, et aussi le sommet de l'angle des tangentes communes. Nous désignerons ce sommet sous le nom de *saillant.*

2. En particulier, les diamètres conjugués de la direction de la droite des contacts, dans le cercle et dans la conique, coïncident; d'où l'on conclut que *le centre de tout cercle bitangent se trouve, ainsi que le saillant, sur l'un des axes de la conique.*

3. *Les pôles d'une droite quelconque par rapport au cercle et à la conique sont en ligne droite avec le saillant.*

En effet, ils appartiennent à la polaire double du point où la droite considérée rencontre la droite des contacts.

4. *Les polaires d'un point quelconque par rapport au cercle et à la conique se coupent sur la droite des contacts.*

Appelons A le point considéré et B celui où sa polaire par rapport au cercle rencontre la droite des contacts. La polaire de B par rapport au cercle passera par A; mais les polaires de B par rapport aux deux courbes coïncident [1]; donc la polaire de B par rapport à la conique passe par A, et, réciproquement, celle de A passe par B.

Il suit de là que deux diamètres conjugués, dans les deux courbes, avec une même direction, se coupent sur la droite des contacts.

Ces propriétés s'appliqueront en particulier :

A la tangente en un point de la conique et à la polaire de ce point par rapport au cercle;

A tout diamètre de la conique et à la perpendiculaire abaissée du centre du cercle sur la tangente à l'extrémité de ce diamètre.

5. *Le saillant et les points de la droite des contacts ont seuls même polaire dans le cercle et dans la conique.*

En effet, les pôles d'une même droite par rapport aux deux courbes doivent appartenir à deux diamètres qui se coupent sur la droite des contacts [4]; s'ils se confondent, ce sera donc en un point de cette ligne.

Les points de l'axe qui contient le centre du cercle échappent à ce raisonnement; mais deux seulement de ces points ont même polaire dans les deux courbes, savoir le saillant et le milieu de la droite des contacts; cela résulte de propositions qui seront établies plus loin.

6. *Si une corde de l'une des deux courbes est tangente à l'autre, ses extrémités formeront une division harmonique avec le point où elle touche la seconde courbe et celui où elle rencontre la droite des contacts.*

En effet, le premier de ces deux points appartient à la polaire de l'autre par rapport à la seconde courbe, laquelle est la même que par rapport à la première [1].

Plus généralement, sur une sécante commune aux deux courbes, le point d'intersection avec la droite des contacts a même conjugué harmonique par rapport aux extrémités des deux cordes.

CERCLES BITANGENTS DE PREMIÈRE ESPÈCE

7. Nous appelons ainsi ceux dont le centre se trouve sur le premier axe ou axe focal. Ils sont intérieurs à la conique et aucune tangente à celle-ci ne les coupe. Pour établir leurs

propriétés, nous ferons usage de points particuliers dont voici la définition :

Un cercle étant donné, ainsi qu'une droite qui ne le rencontre pas, il est facile de trouver deux points tels que le système formé par chacun avec le cercle admette, comme axe radical, la droite; nous les appellerons les *nœuds*. Ils sont équidistants de la droite et forment avec les extrémités du diamètre perpendiculaire à cette droite, une division harmonique. Leur demi-distance est moyenne proportionnelle entre les distances de leur milieu à ces mêmes extrémités. Enfin, le rayon du cercle est moyenne proportionnelle entre les distances de son centre aux nœuds.

Exemple : les foyers d'une conique sont les nœuds du deuxième axe par rapport à toute circonférence ayant pour diamètre la portion du premier axe comprise entre le centre d'un cercle bitangent et le saillant.

Les nœuds de deux circonférences par rapport à leur axe radical coïncident.

8. Lemme. *De chaque nœud, on voit, sous un angle droit, la portion de la droite comprise entre l'un quelconque de ses points et la polaire de ce point par rapport au cercle.*

Soient O (*fig. 1*) le centre du cercle, AB la droite, Ω, Ω′ les deux nœuds, BC la polaire d'un point A de la droite. On aura

$$OA.OC = O\Omega.O\Omega',$$

parce que chacun de ces deux produits est égal au carré du rayon. Il suit de là que les quatre points A, C, Ω, Ω′ sont sur une même circonférence. Cette circonférence passe aussi en B, car elle a son centre sur AB et sur la perpendiculaire élevée à AC en son milieu, c'est-à-dire que ce centre se trouve au milieu de AB. Donc l'angle AΩB, inscrit dans un demi-cercle, est droit.

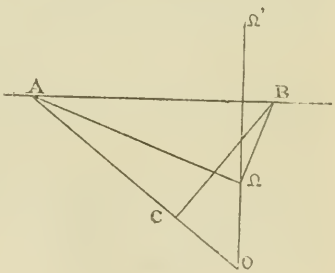


Fig. 1.

9. *De chacun des nœuds d'une tangente à une conique par rapport à un cercle bitangent, on voit, sous un angle droit, la portion de cette tangente comprise entre le point où elle touche la courbe et celui où elle rencontre la droite des contacts.*

En effet, ces deux derniers points se trouvant chacun sur la polaire de l'autre par rapport au cercle [1], les droites qui les joindront à un nœud seront perpendiculaires entre elles [8].

Cette propriété est d'ailleurs une conséquence de la suivante.

10. *Si l'on joint l'un des nœuds d'un cercle bitangent et d'une droite aux points d'intersection de celle-ci avec la conique, et au point où elle rencontre la droite des contacts, la troisième des lignes ainsi obtenues sera bissectrice de l'un des angles formés par les deux autres.*

En effet, le conjugué harmonique du troisième point par rapport aux deux premiers appartient à la polaire de ce troisième point par rapport au cercle [1]. Dans le faisceau harmonique que l'on obtiendra en joignant le nœud aux quatre points, il y aura donc deux rayons rectangulaires [8], et, par conséquent, bissecteurs des angles des deux autres rayons.

Si la droite rencontre le cercle, auquel cas les nœuds n'existent plus, la proposition pourra être remplacée par la suivante :

Une droite étant sécante commune à une conique et à un cercle bitangent, son point d'intersection avec la droite des contacts sera l'un des nœuds, par rapport à leur axe radical, des circonférences décrites sur les deux cordes comme diamètres.

En effet, le point commun à la sécante et à la droite des contacts, et celui où la polaire de ce point rencontre la sécante sont conjugués harmoniques par rapport aux extrémités de l'une et de l'autre corde [6].

11. *Le lieu des nœuds d'une même tangente à la conique, par rapport aux divers cercles bitangents, se compose des deux droites qui joignent le point de contact aux foyers.*

Soient O *(fig. 2)* le centre d'une conique, M un point de la courbe, TU la tangente et MN la normale en ce point, H le centre d'un cercle bitangent, UV la droite des contacts, Ω et Ω' les nœuds du cercle et de la tangente, lesquels

appartiennent à la perpendiculaire HD abaissée de H sur TU. Il s'agit de démontrer que les points de rencontre, F, F′, de l'axe OH avec MΩ, MΩ′ sont les foyers.

Nous nous appuierons sur ce que ΩU, qui joint l'un des nœuds au point d'intersection U de la tangente avec la droite des contacts, est perpendiculaire à MΩ [9], et sur ce que OM, HD se coupent en un point V de la droite des contacts [4].

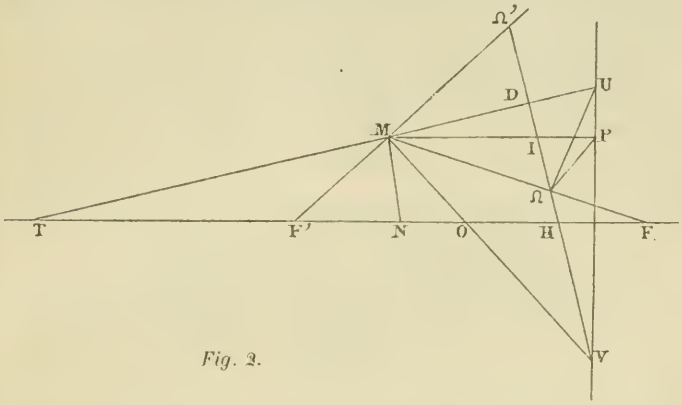


Fig. 2.

Soit I le point où la perpendiculaire MP à cette dernière droite rencontre HD. Dans le triangle rectangle MΩU, on a

$$\overline{\Omega D}^2 = DM.DU;$$

mais les deux triangles semblables IDM, UDV donnent

$$DM.DU = DI.DV;$$

il vient donc $$\overline{\Omega D}^2 = DI.DV,$$

ce qui prouve que les quatre points V, Ω, I, Ω′ forment une division harmonique, et que le faisceau des droites qui les joignent à M est harmonique. L'axe OH, parallèle au rayon MI de ce faisceau, est rencontré par les trois autres aux points O, F, F′; il en résulte que O est le milieu de FF′. D'un autre côté, MT et MN étant bissectrices des angles de MΩ avec MΩ′, ou de MF avec MF′, le segment FF′ est conjugué harmonique de TN. Mais la portion de l'axe limitée par les deux foyers forme elle-même un segment conjugué de TN, et a aussi pour milieu O; donc elle coïncide avec FF′.

On voit que le lieu des foyers des coniques bitangentes à

un même cercle, et tangentes, en un même point, à une droite donnée se compose de deux droites.

12. *Les distances de chaque foyer au centre d'un cercle bitangent et à l'une des extrémités de la corde des contacts ont entre elles un rapport égal à l'excentricité.*

Autrement dit, la portion de l'axe comprise entre un foyer et la normale en un point de la conique est, avec le rayon vecteur de ce point, dans un rapport constant égal à l'excentricité. Cela résulte de la similitude du triangle formé par l'axe, la normale et le rayon vecteur, avec celui qui a, pour sommets, le centre de la conique, le second foyer et le pied de la perpendiculaire abaissée de ce second foyer sur la tangente. *(A suivre.)*

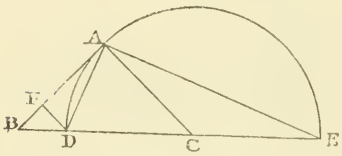
THÉORÈME DE TRIGONOMÉTRIE

par M. l'abbé **E. Gelin**, professeur au collège Saint-Quirin, à Huy (Belgique).

Voici une démonstration, *très simple*, du théorème :

Dans tout triangle, la somme de deux côtés est à leur différence, comme la tangente de la demi-somme des angles opposés est à la tangente de leur demi-différence.

Décrivons, du sommet C comme centre, avec CA comme rayon, la demi-circonférence DAE; tirons AD et AE et menons DF parallèle à AE. L'angle inscrit E est égal à $\frac{1}{2}$ C, et l'angle AFD, extérieur au triangle BDF, est égal à $B + \frac{1}{2}C$.



On a donc

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{BE}{BD} = \frac{AE}{DF} = \frac{AD \cot g \frac{1}{2} C}{AD \cot g \left(B + \frac{1}{2} C\right)} = \frac{tg \frac{1}{2}(A+B)}{tg \frac{1}{2}(A-B)}.$$

Cette démonstration est tirée de mes *Éléments de Trigonométrie*, Paris, 1891, page 113. Elle n'est pas nouvelle, puisqu'on la trouve déjà dans l'ouvrage d'Ozanam : *Tables des sinus, tangentes et sécantes*, etc., *avec un Traité de Trigonométrie par de nouvelles démonstrations*, Paris, 1685, page 53. Il est probable qu'on la trouve aussi dans des Traités plus récents, mais je ne pense pas qu'elle ait été jusqu'ici signalée dans le *J. M. E.*

EXERCICES SUR LES DÉTERMINANTS

Par M. **Elgé.**

11 (*). — Soit Δ le déterminant de l'ordre $4p$:

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{4p+k-2}{k-1} & \cdots & \frac{p(4k-8)+1}{k-1} & 4p \\ \frac{4p+k-2}{k-1} & \frac{8p+k-3}{k-1} & \cdots & 4p & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{8p+k-3}{k-1} & 1 & \cdots & \frac{p(4k-12)+2}{k-1} & \frac{p(4k-8)+1}{k-1} \end{vmatrix}$$

p et k étant des nombres entiers.

Démontrer que

$$(1) \qquad \frac{4p-1}{k-1} = \frac{1}{4p}\sqrt[4p-1]{\frac{2\Delta}{4p+1}};$$

même si l'on échange les diagonales du déterminant.

Le déterminant Δ est formé par les permutations des termes d'une progression arithmétique dont le premier terme est 1, le nombre des termes $4p$ et la raison

$$\frac{4p-1}{k-1}.$$

(*) Cet exercice nous a été communiqué, avec la démonstration qui suit, par M. Georges d'Avillez. Nous insérerons bien volontiers les exercices élémentaires relatifs aux déterminants que des correspondants obligeants voudront nous communiquer. Ces exercices nous paraissent devoir intéresser particulièrement nos lecteurs, qui se familiariseront, en les résolvant, au calcul algébrique et à l'esprit des transformations algébrique, qui se présentent si fréquemment dans le calcul des déterminants. *G. L.*

D'après un théorème dû à M. Roberts (*N. A.*, question 465), théorème qui est la généralisation d'un autre théorème de Painvin (*N. A.*, question 432), un déterminant ainsi formé, d'ordre n, u étant le terme principal et α la raison de la progression, est égal à l'expression

$$\pm \frac{(n\alpha)^{n-1}[2u + (n-1)\alpha]}{2},$$

dans laquelle on doit prendre le signe + lorsque n est un multiple de 4.

Dans le cas qui nous occupe, n étant égal à $4p$, on a

$$\Delta = \frac{\left[4p\frac{4p-1}{k-1}\right]^{4p-1} \times [p+1]}{2}.$$

Après quelques calculs faciles, on trouve l'égalité (1).

Cette égalité est encore vraie si l'on échange les diagonales du déterminant, car ce déterminant est d'ordre doublement pair et ne change pas de signe.

En supposant $4p = k = n$,
on obtient le théorème de Painvin, cité plus haut.

12. — On a

$$\begin{vmatrix} 1 & C_m^1 & C_m^2 & \ldots C_m^p \\ 1 & C_{m+1}^1 & C_{m+1}^2 & \ldots C_{m+1}^p \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & C_{m+p}^1 & C_{m+p}^2 & \ldots C_{m+p}^p \end{vmatrix} = 1,$$

Pour le démontrer, on désignera ce déterminant par Δ_p et l'on fera voir, par la soustraction des lignes deux à deux, que $\Delta_p = \Delta_{p-1}$. D'ailleurs,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & m \\ 1 & m+1 \end{vmatrix} = 1;$$

on a donc

$$\Delta_p = 1.$$

13. — On a

1° $$\begin{vmatrix} a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{vmatrix} = -(a+b+c)(b-c)(c-a)(a-b),$$

2° $\begin{vmatrix} bc & a & a^2 \\ ac & b & b^2 \\ ab & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(ab+ac+bc),$

3° $\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} = abcd\left(1+\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}\right),$

4° $\begin{vmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{vmatrix} = a(b-a)(b-c)(c-d).$

On vérifiera facilement ces formules; elles sont susceptibles de généralisations intéressantes. *(A suivre.)*

SUR LES PUISSANCES D'UN TRIANGLE

Par **Georges F. d'Avillez.**

Considérons les expressions

$$p_a = \frac{b^2+c^2-a^2}{2}, \quad p_b = \frac{c^2+a^2-b^2}{2}, \quad p_c = \frac{a^2+b^2-c^2}{2},$$

appelées par M. Duran Loriga *puissances partielles relatives aux sommets* A, B, C *d'un triangle* (*).

1. — Soient Γ, Γ', Γ'' les cercles tangents deux à deux aux sommets du triangle; leurs rayons (*Journal de Math. élém.*, question 620) sont donnés par les expressions

$$\rho = \frac{abc}{b^2+c^2-a^2}, \quad \rho' = \frac{abc}{c^2+a^2-b^2}, \quad \rho'' = \frac{abc}{a^2+b^2-c^2}.$$

On aura donc

$$\frac{1}{\rho} = \frac{2p_a}{abc}, \qquad \frac{1}{\rho'} = \frac{2p_b}{abc}, \qquad \frac{1}{\rho''} = \frac{2p_c}{abc},$$

ou

$$\frac{1}{p_a} = \frac{2\rho}{abc}, \qquad \frac{1}{p_b} = \frac{2\rho'}{abc}, \qquad \frac{1}{p_c} = \frac{2\rho''}{abc}.$$

Ainsi, P étant la puissance totale du triangle, on a

$$(1) \qquad \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''} = \frac{2P}{abc},$$

(*) Voir *Journal de Math. élém.*, p. 145, une note de M. Bozal Obejero.

$$(2) \qquad \frac{1}{p_a} + \frac{1}{p_b} + \frac{1}{p_c} = \frac{2(\rho + \rho' + \rho'')}{abc}.$$

On peut donc énoncer les propositions suivantes :

La somme des inverses des rayons des cercles Γ, Γ', Γ'' *est égale au double de la puissance totale du triangle divisée par le produit des côtés.*

La somme des inverses des puissances partielles du triangle est égale au quotient du double de la somme des rayons des cercles Γ, Γ', Γ'' *par le produit des côtés.*

Des expressions (1), (2), on tire

$$(3) \quad (\rho + \rho' + \rho'')\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''}\right) = P\left(\frac{1}{p_a} + \frac{1}{p_b} + \frac{1}{p_c}\right);$$

donc :

Le produit de la somme des rayons des cercles Γ, Γ', Γ'' *par la somme des inverses des mêmes rayons est égal au produit de la puissance totale du triangle par la somme des inverses des puissances partielles.*

2. Si T, T′, T″ sont les cercles de Torricelli (1) du triangle ABC, leurs rayons sont donnés par les formules

$$R_1^2 = \frac{a^2}{3}, \qquad R_2^2 = \frac{b^2}{3}, \qquad R_3^2 = \frac{c^2}{3};$$

on a donc

$$(4) \qquad 3(R_1^2 + R_2^2 + R_3^2) = 2P.$$

Ainsi :

Le triple de la somme des carrés des rayons des cercles de Torricelli est égal au double de la puissance totale du triangle.

On peut trouver une relation entre les rayons des cercles Γ, Γ', Γ'' et ceux des cercles de Torricelli ; en comparant (*) et (4), on trouve

$$(5) \qquad \frac{abc}{3}\left(\frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho''}\right) = R_1^2 + R_2^2 + R_3^2,$$

donc :

Un tiers du produit des côtés du triangle par la somme des inverses des rayons des cercles Γ, Γ', Γ'' *est égal à la somme des carrés des cercles de Torricelli.*

(*) M. Neuberg a donné ce nom aux cercles circonscrits aux triangles équilatéraux construits sur les côtés.

NOTICE HISTORIQUE

SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA MESURE

Par M. **Aubry.**

(*Suite*, voir page 201.)

EUCLIDE

On voit le premier emploi connu de la méthode d'exhaustion dans le douzième livre des *Éléments* d'Euclide. Voici d'ailleurs les propositions qu'il contient avec les démonstrations simplifiées par l'exposition préalable que nous avons faite des lemmes (A), (B), (C), et l'emploi des signes actuels de l'Algèbre.

I. — *Les polygones semblables inscrits dans deux cercles sont comme les carrés des diamètres.* Démonstration connue.

II. — *Deux cercles sont entre eux comme les carrés de leurs diamètres.*

Dans les deux cercles, inscrivons deux carrés, qui seront dans le rapport indiqué (I), de même que les polygones réguliers inscrits de huit, de seize,... côtés. Or, chaque fois qu'on double le nombre des côtés, on retranche de la partie comprise entre la circonférence considérée et le dernier polygone, plus de sa moitié. En effet, le triangle ELF *(fig. 1)*, moitié du rectangle ETVF, est évidemment plus grand que la moitié du segment ELF.

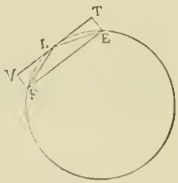


Fig. 1.

Par conséquent, d'après (C), l'excès de chaque cercle sur les polygones qui y sont inscrits peut devenir plus petit qu'aucune surface donnée et, par suite, d'après le théorème d'Eudoxe (A), les deux cercles sont dans le rapport annoncé.

III. — *Tout tétraèdre peut se diviser en deux tétraèdres égaux et semblables au premier et en deux prismes équivalents, qui, ensemble, sont plus grands que la moitié du tétraèdre proposé.*

On prend les milieux des arêtes *(fig. 2)*, ce qui donnera les deux tétraèdres AEGH, HIKD, et les deux prismes égaux EBFGHI, CFGHIK. Les deux premiers sont visiblement semblables au proposé. Or, le prisme EBFGHI est plus grand que le tétraèdre EBFI, qui y est contenu, et celui-ci est égal à AEGH = HIKD. Donc, les deux prismes, réunis, forment une somme plus grande que celle des deux tétraèdres AEGH, HIKD.

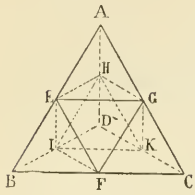


Fig. 2.

IV-V. — *Deux tétraèdres de même hauteur sont comme leurs bases.*

Par des opérations successives, semblables à celle qu'indique la proposition précédente, on peut retirer de chaque tétraèdre une partie plus grande que sa moitié; des tétraèdres, qui sont semblables au premier, une partie plus grande que leur moitié; et ainsi de suite. On peut donc, d'après (C), retirer des deux solides proposés une partie qui en diffère d'aussi peu qu'on voudra. Or, les prismes retranchés sont entre eux comme les bases des tétraèdres correspondants et, par conséquent, dans un rapport constant. Donc, d'après (A), les tétraèdres proposés sont eux-mêmes comme leurs bases (*).

VI. — *Deux pyramides de même hauteur sont comme leurs bases.*

VII. — *Un prisme triangulaire peut se décomposer en trois tétraèdres équivalents.*

VIII. — *Les pyramides semblables sont comme les cubes de leurs côtés.* On décompose les pyramides en tétraèdres et on se reporte aux parallélipipèdes dont ils font partie.

X. — *Le cône est le tiers du cylindre circonscrit.* La démonstration est analogue à celle de II : au lieu de retrancher des triangles de plus en plus petits, on retranche des tétraèdres ayant ces triangles pour bases.

(*) La démonstration très simple qu'on donne aujourd'hui de cette proposition est due à Querret (*An. de Gerg.*, 1823). C'est, comme nous le verrons, la conséquence des méthodes d'Archimède et de Kepler.

XI. — *Les cônes et les cylindres de même hauteur sont comme les bases.* Démonstration analogue à celle du § X.

XII. — *Les cônes et les cylindres semblables sont comme les cubes des diamètres.* Démonstration analogue à celle du § X.

XVI. — *Étant données deux circonférences concentriques, on peut inscrire à la plus grande un polygone régulier d'un nombre pair de côtés, qui ne touche pas la plus petite.* Menons la tangente GH à la plus petite *(fig. 3)*. Si, de la demi-circonférence AC, on retire sa moitié AB; de celle-ci, sa moitié CD, et ainsi de suite; on arrivera (C) à un reste CK plus petit que l'arc CG : CK est le côté du polygone demandé.

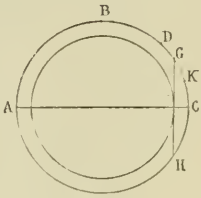


Fig. 3.

Il est clair d'ailleurs que les cordes, soutendant la moitié, le quart, le huitième, etc., de l'arc CK, répondent également à la question.

XVII. — *Etant données deux sphères concentriques, on peut toujours inscrire à la plus grande un polyèdre qui ne touche pas la plus petite.* Dans le grand cercle ICD *(fig. 4)*, inscrivons un polygone CKL... tel que le demande la proposition précédente, et faisons la même opération dans les grands cercles OC, OK, dont les plans sont perpendiculaires à celui du premier, ce qui donne les quadrilatères SC, TP, VQ,... lesquels sont évidemment plans. Soit Z la projection de I sur le plan du quadrilatère SC, on a

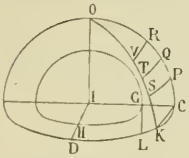


Fig. 4.

$$ZK = ZC = ZP = ZS \quad \text{et} \quad SK = PC = CK > SP.$$

Par conséquent, Z est le centre d'une circonférence passant par les sommets du quadrilatère SPCK dont trois côtés sont égaux et le quatrième plus petit; donc l'angle KZC est plus grand qu'un droit; par suite

$$CZ < CK < GL.$$

Or, on a $IZ^2 + CZ^2 = IC^2 = IL^2 = IG^2 + GL^2$,

et, puisque $CZ < GL$, il s'ensuit que $IZ > IG$. On démontre la même chose pour les autres faces du polyèdre.

XVIII. — *Deux sphères sont entre elles comme les cubes des diamètres.*

Dans les deux sphères, inscrivons deux polyèdres semblables entre eux et à celui de la proposition XVII. Ces deux polyèdres sontcomme les cubes des diamètres. Or, chacun d'eux diffère de la sphère circonscrite évidemment moins qu'une sphère qui lui serait elle-même inscrite, etpeut, par conséquent, en différer aussi peu qu'on veut. Donc, d'après le théorème d'Eudoxe, les deux sphères sont dans le rapport indiqué.

Pour mieux montrer la manière d'Euclide, nous reproduirons, en l'abrégeant, la démonstration même qu'il a donnée de cette proposition.

Considérons les trois sphères A, C, E *(fig. 5)*, et supposons que les cubes de AB, CD soient comme les deux sphères A, E : il faut démontrer que les deux sphères C, E sont égales.

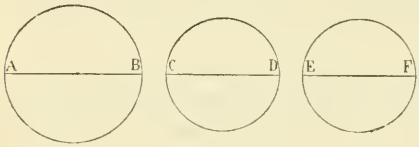


Fig. 5.

Supposons la sphère E plus petite que la sphère C; transportons l'une d'elles de manière à les rendre concentriques. On pourra inscrire à C un polyèdre enveloppant E. Inscrivons un polyèdre semblable dans A : les deux polyèdres étant entre eux comme les cubes de AC et CD, on a

$$\frac{\text{sph. A}}{\text{sph. E}} = \frac{\text{pol. A}}{\text{pol. C}} \qquad \text{et} \qquad \text{sph. E} < \text{pol. C},$$

d'où, (puisque sph. A > pol. A), sph. E > pol. C, ce qui est contre l'hypothèse, et, par suite, on ne peut avoir E < C.

Soit E > C, et posons

$$\frac{\overline{CD}^3}{\overline{AB}^3} = \frac{\text{sph. E}}{\text{sph. A}} = \frac{\text{sph. C}}{\text{sph. X}}, \qquad \text{d'où} \qquad X < A;$$

on aurait donc

$$\frac{\text{sph. C}}{\text{sph. X}} = \frac{\overline{CD}^3}{\overline{AB}^3}, \qquad \text{et} \qquad X < A,$$

ce qui vient d'être démontré impossible. La sphère E ne pouvant être ni plus petite ni plus grande que la sphère C, elle lui est donc égale.

Telles sont les applications qu'Euclide a faites de la méthode d'exhaustion. Les propositions III, XVI, XVII sont devenues inutiles à cause des démonstrations trouvées, depuis, pour les propositions IV, V et XVIII, mais elles n'en sont pas moins très remarquables, surtout comme applications du même principe (C). Les démonstrations de II, X, XI, XII, ont été maintenues par Legendre et remplacées, depuis, à tort selon nous, par d'autres où l'on passe du polygone régulier au cercle, en sous-entendant ainsi que toute propriété du premier convient au second, sa limite : ce qui constitue une hypothèse gratuite et d'ailleurs moins facile à bien saisir qu'elle ne paraît.

(A suivre.)

EXERCICES DIVERS

Par M. **A. Boutin.**

435. — A′, B′, C′, *étant les sommets d'un triangle équilatéral inscrit dans une circonférence, et* P *étant un point quelconque (intérieur ou extérieur), les droites* PA′, PB′, PC′ *rencontrent la circonférence aux points* A, B, C ; *démontrer que* P *est le premier (ou le second) isodynamique du triangle* ABC.

On constate aisément que P_2, inverse de P, dans ABC, est le premier (ou le second) isogone.

Cette propriété est caractéristique des centres isodynamiques ; c'est-à-dire qu'aucun autre point du plan du triangle n'est tel que les droites qui le joignent aux sommets rencontrent la circonférence circonscrite en des points qui sont les sommets d'un triangle équilatéral.

436. — A′, B′, C′ *étant les sommets d'un triangle équilatéral,* V *un point quelconque à l'intérieur de la circonférence* A′B′C′, *de centre* O, *les droites* A′V, B′V, C′V *rencontrent cette circonférence en* ABC. *Si* V *décrit une circonférence concentrique à* O, *les triangles* ABC *ont même angle de Brocard, et par suite les points remarquables suivants de ces triangles : centres isodynamiques, point de Lemoine, points de Brocard, réciproque du point de Lemoine,... décrivent des circonférences concentriques à* O.

437. — *Autour des sommets d'un triangle, des droites que l'on suppose primitivement coïncider avec les bissectrices intérieures,*

tournent avec des vitesses angulaires uniformes respectives : $\omega, \omega', \omega''$; *pour que ces droites soient concourantes, il faut et il suffit que ces vitesses angulaires soient liées par la relation*

$$\operatorname{tg} \omega t . \operatorname{cotg} \frac{A}{2} + \operatorname{tg} \omega' t . \operatorname{cotg} \frac{B}{2} + \operatorname{tg} \omega'' t . \operatorname{cotg} \frac{C}{2}$$
$$+ \operatorname{tg} \omega t . \operatorname{tg} \omega' t . \operatorname{tg} \omega'' t \operatorname{cotg} \frac{A}{2} . \operatorname{cotg} \frac{B}{2} . \operatorname{cotg} \frac{C}{2} = 0 .$$

BACCALAURÉATS

BACCALAURÉAT DE L'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE MODERNE

(LETTRES-SCIENCES)

(7 juillet 1896.)

Académie d'Aix *(Faculté de Marseille).*

On donne un triangle ABC dans lequel on connaît les côtés a, b, c. Supposant $b > c$, on partage le triangle en deux parties équivalentes au moyen d'une perpendiculaire HK à la base BC. On demande de calculer à quelle distance CH du point C sera le pied H de cette perpendiculaire; on demande aussi d'indiquer une construction géométrique.

On suppose $BC = 40^m$ $CA = 37^m$ $AB = 13^m$.

Académie d'Alger.

I. *Questions au choix.* — 1° Énoncer et démontrer le théorème des trois perpendiculaires.

2° Démontrer que si deux plans sont perpendiculaires à un troisième, leur intersection est perpendiculaire à ce troisième plan.

3° Démontrer que la somme des angles dièdres d'un trièdre est comprise entre deux droits et six droits.

II. *Problème.* — Deux corps G et G′ de poids donnés P et P′ sont pressés par des forces horizontales F et F′ contre deux plans inclinés MA et MB faisant avec l'horizon des angles α et α'. On propose de calculer les forces F et F′ ainsi que les angles α et α' en sachant remplies les conditions suivantes :

1° Les corps GG′ sont en équilibre sur les plans MA, MB;

2° Les pressions supportées par les deux plans sont égales entre elles.

3° L'angle, en M, a une valeur θ.

On néglige le frottement.

Examiner les cas où $\theta = 90°$.

Application numérique :

$$P = 100^{kg} \qquad P' = 8^{kg}5 \qquad \theta = 120°.$$

Académie de Besançon.

I. *Questions au choix.* 1° Maxima et minima de la fonction :

$$\frac{x^2 + 1}{(x-1)(x-2)}.$$

2° Inscription du décagone régulier dans un cercle.

3° Détermination du rapport de la circonférence au diamètre par la méthode des isopérimètres.

II. *Problème.* — On donne la longitude et la latitude géographiques de deux lieux A et A′ situés sur la surface de la terre supposée sphérique. On prend l'équateur et le méridien zéro pour plans de projection et on demande de construire : 1° les traces du plan du grand cercle déterminé par A et A′; 2° l'arc de grand cercle AA′, en vraie grandeur; 3° la projection d'un point quelconque de cet arc.

Académie de Bordeaux.

I. *Questions au choix :*

1° Maxima et minima de $y = \dfrac{x^2 + 1}{4x^2 - 4x - 3}$.

2° Somme des carrés des n premiers nombres entiers.

3° Logarithmes vulgaires.

II. *Problème.* — On donne un triangle ABC et un point P sur la base BC. — Porter, à partir du sommet A, sur les côtés AB, AC, deux longueurs égales AM, AN, telles qu'en abaissant des points M, N, les perpendiculaires Mm, Nn sur BC, la résultante des forces Mm et Nn passe par le point P.

Académie de Caen.

I. *Questions au choix :* 1° Construire, avec la règle et le compas, le côté d'un carré dont la surface soit égale aux $\frac{8}{3}$ de la surface d'un carré de côté donné.

2° Résoudre l'équation $a \sin x + b \cos x = c$; dire combien elle admet de solutions comprises entre 0° et 360°.

3° Faire et expliquer l'épure propre à déterminer la plus courte distance de deux droites données par leurs projections, l'une des droites étant supposée horizontale.

II. *Problème.* — Démontrer que le trinôme bicarré $x^4 + px^2 + q$ peut toujours se décomposer en un produit de deux facteurs *réels* du second degré. Application au cas où le trinôme se réduit à l'expression $x^4 + 1$.

QUESTION 418

Solution par M. E. Lemoine.

On considère la circonférence qui passe par le sommet A *et par le point de Lemoine d'un triangle* ABC *et qui coupe orthogonalement le cercle circonscrit. Démontrer que l'on a, pour tout point* M *de cette ligne.*

$$\frac{a^2\overline{MA}^2}{b^2\overline{MB}^2 - c^2\overline{MC}^2} = \frac{m_a^2}{m_b^2 - m_c^2}$$

(a, b, c *désignant les côtés du triangle*; m_a, m_b, m_c *les médianes*).

(L. Bénézech.)

Cherchons le lieu des points M pour lesquels la condition de l'énoncé est remplie. Si x, y, z sont des coordonnées normales, ABC étant le triangle de référence, et si l'on se rappelle que l'on a

$$\overline{MA}^2 = \frac{b^2c^2}{(ax + by + cz)^2}(y^2 + z^2 + 2yz\cos A), \quad \text{etc.}$$

et

$$m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4}, \qquad \text{etc.}$$

le lieu est donné immédiatement par l'équation

$$\frac{y^2 + z^2 + 2yz\cos A}{z^2 - y^2 + 2xz\cos B - 2xy\cos C} = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{z(c^2 - b^2}, \text{ou}$$

$$y^2(b^2 - 5c^2 + a^2) - z^2(c^2 - 5b^2 + a^2) + 6yz(b^2 - c^2)\cos A$$
$$+ 2xz(2b^2 + 2c^2 - a^2)\cos B - 2xy(2b^2 + 2c^2 - a^2)\cos C = 0.$$

On reconnaît facilement que cette équation représente une circonférence, qu'elle passe par le point de Lemoine (a, b, c) et que sa tangente en A a pour équation $y\cos C - z\cos A = 0$; c'est le rayon OA.

Le théorème est donc établi.

Remarques. — Il y a deux autres circonférences analogues correspondant à chaque sommet; elles ont, toutes trois, pour axe radical commun, la droite

$$\Sigma\frac{b^2 - c^2}{a}x = 0.$$

qui joint le point K de Lemoine au centre O du cercle circonscrit. Si K′ est le second point commun aux trois circonférences, on a $OK.OK' = R^2$.

QUESTION 644

Solution par M. G. Tzitzéica.

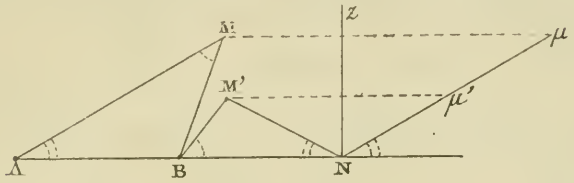
A *et* B *étant deux points fixes,* M *un point variable du plan, sur la tangente en* B *au cercle* ABM *on porte* $BM' = K.\frac{BM}{AM}$, *où* K *est une longueur constante; le lieu de* M *étant donné, trouver le lieu de* M′. *Montrer que si le lieu de* M *est une droite ou une circonférence, celui de* M′ *est généralement un cercle.*

(Bernès.)

Prenons, sur AB, BN = K. Les triangles BM'N et AMB sont semblables, car $\widehat{M'BN} = \widehat{AMB}$ et $\frac{BM'}{BN} = \frac{BM}{AM}$.

Donc
$$\frac{BN}{AM} = \frac{M'N}{AB},$$
d'où
$$AM.M'N \equiv K.AB = \text{const.}$$

L'angle M'NB est égal à MAB; si nous menons, par N, une droite Δ parallèle à AM, les parallèles à AB menées



par M' et M, rencontrent Δ en deux points μ, μ' tels que Nμ = AM, Nμ' = NM'.

On a donc
$$N\mu.N\mu' = \text{const.}$$

Or μ décrit une courbe égale à celle qui est décrite par le point M, puisque AM et Nμ sont deux vecteurs équipollents; μ' décrit une courbe égale à celle que décrit le point M', puisque les points M', μ' sont symétriques par rapport à la perpendiculaire Nz élevée, en N, à AB. Donc, lorsque M décrit une droite ou un cercle, le lieu de M' est un cercle.

QUESTION 669

Solution par M. Goyens.

On donne un rectangle ABCD, *dans lequel* B,D *désignent deux sommets opposés. Soient* Γ,Γ' *deux cercles de centres* O, O' *tangents entre eux et touchant respectivement* AB *en* B; AD *en* D. *La droite* OO' *enveloppe une circonférence.* (G. L.)

1° Supposons *(fig. 1)* les cercles tangents extérieurement.

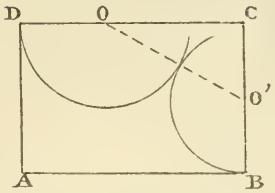


Fig. 1.

On aura :

$$OO' = OD + O'C = DC - OC + BC - O'C$$

d'où

$$OO' + OC + O'C = DC + BC.$$

Le triangle OO'C a donc un périmètre constant, égal à la moitié du périmètre du rectangle ABCD et un angle fixe C. Le côté OO' enveloppe donc un cercle tangent aux côtés CD, CB à des distances du sommet C égales à $\frac{CD + BC}{2}$.

2° Supposons *(fig. 2)* les cercles tangents intérieurement.

On aura :

$$OO' = O'S - OS = O'B - OD$$
$$= O'C + CB - DC + OC,$$

d'où

$$OO' - O'C - OC = CB - DC,$$

ou

$$O'C + OC - OO' = DC - CB.$$

Or $\frac{O'C + OC - OO'}{2}$ est le rayon du cercle Δ inscrit dans le triangle OO'C. Les points de contact sur les côtés CO', CO, étant à une distance $\frac{DC - CB}{2}$ du sommet C, la droite OO' enveloppe donc la circonférence Δ.

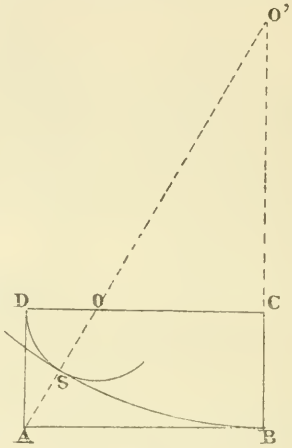


Fig. 2.

Nota. — Solutions analogues par MM. E. Foucart, Droz-Farny, H. L'Huillier.

QUESTION 670

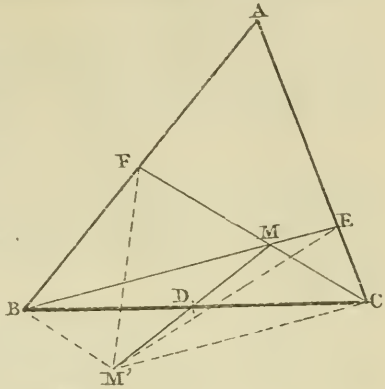
Solution par M. H. L'Huillier.

Un triangle ABC *étant donné, on considère dans son plan deux points* M, M' *symétriques l'un de l'autre relativement au milieu* D

de BC. *Si* BM *et* CM *rencontrent* AC, AB, *en* E,F, *démontrer que les triangles* M'CE, M'FB *sont équivalents et présentent le même sens rotatoire.*

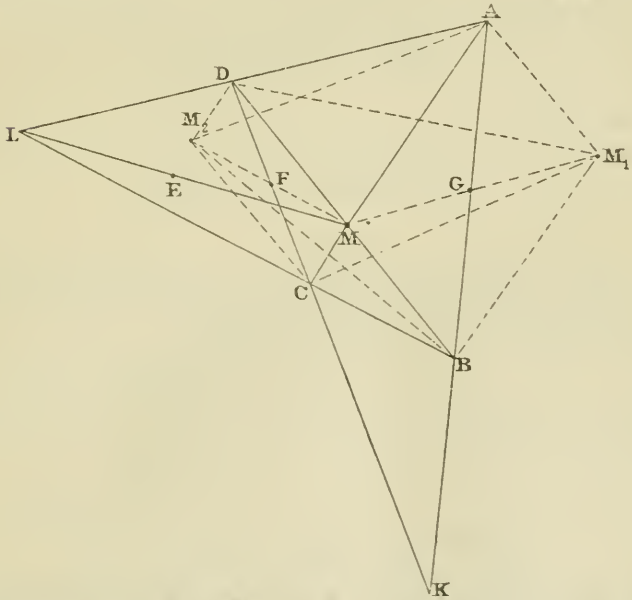
Appliquer cette proposition à démontrer que, dans un quadrilatère plan quelconque ABCD, *convexe ou non, où* AD, DC *se coupent en* L *et* AC, BD *en* M, *les milieux de* AB, CD, LM, *sont trois points en ligne droite.*

(Bernès.)



En effet, les triangles M'CE et M'FB sont équivalents tous deux au triangle M'BC.

Appelant EFG les milieux de LM, DC, AB et prenons



les symétriques M_1 et M_2 de M par rapport à G et F. Les triangles M_1AD, M_1CD d'une part et M_2AD, M_2CD sont

équivalents. Les rapports des distances de M_1 à AL et BL et de M_2 aux mêmes droites sont égaux à $\frac{CB}{AD}$ et les points L, M_2, M_1 sont en ligne droite. Par suite des milieux E, F, G, des droites ML, MM_2, MM_1 sont en ligne droite.

On verrait de même que

$$\widehat{AMB} = \widehat{AM'B}.$$

Les faisceaux M(ABC), M'(ABC) sont alors symétriquement égaux et les points M et M' sont isoptiques.

Remarque. — Comme l'indique une note du Journal, on peut démontrer la proposition précédente à l'aide de la question 670.

Les triangles M'BF et M'CE étant équivalents, on a

$$BF.M'm' = CE.M'm'_2.$$

Les triangles MBF et MCE étant semblables, on a

$$\frac{Mm}{BF} = \frac{Mm_2}{CE}.$$

Multipliant membre à membre les deux égalités, on a

$$Mm.M'm' = Mm'_2.M'm'_2.$$

et les deux droites AM, AM' sont isogonales.

Nota. — Autre solution par M. Droz-Farny.

QUESTIONS PROPOSÉES

769. — Construire un triangle ABC, connaissant le rayon R du cercle circonscrit, la longueur d'un côté a et la distance de l'orthocentre H au milieu de ce côté.

(A. Schiappa-Monteiro.)

770. — Construire un triangle ABC, connaissant le rayon R du cercle circonscrit, la distance de l'orthocentre H au milieu d'un côté a et la médiane m relative à ce côté.

(A. Schiappa-Monteiro.)

771. — Démontrer que

$$9(xy - 9z)^2 - 36(x^2 - 3y)(y^2 - 3xz)$$

est la somme d'un carré et de la moitié d'un cube, quelles que soient les valeurs x, y, z. *(E.-N. Barisien.)*

772. — Construire un triangle ABC, connaissant la différence d de deux côtés b, c et les rayons R, r des cercles circonscrit et inscrit. *(A. Schiappa-Monteiro.)*

773. — 1° Lorsque deux circonférences Δ, Δ' de centres O, O′ se coupent en A, orthogonalement; S étant le centre de similitude, l'un des angles OAS est de 45°, l'autre O′AS est de 135°.

En d'autres termes, si l'on préfère cette forme donnée à l'énoncé :

Si deux circonférences se coupent orthogonalement, la corde commune est vue du centre de l'une des circonférences et du centre de similitude sous des angles complémentaires.

2° La polaire de S par rapport à l'une des circonférences, à Δ par exemple, coupe les droites AO, AO′ en des points P, P′. Démontrer que AP est égal au rayon de Δ' et que AP′ est égal au rayon de Δ (*). *(G. L.)*

774. — Démontrer que la somme des inverses des distances du centre de gravité d'un triangle aux points où les côtés de ce triangle sont rencontrés par une transversale, issue de ce centre de gravité, est nulle. *(Mannheim.)*

775. — Par le centre d'un parallélogramme, mener deux droites rectangulaires qui le divisent en quatre parties équivalentes. *(P. Girardville.)*

776. — Soient : M, un point d'une ellipse, de centre O ; P, la projection de M sur le grand axe ; T et N les points où la normale et la tangente en M rencontrent respectivement le grand axe. On prend sur le grand axe NQ = OP et on trace le cercle de diamètre QT. Montrer que la tangente menée de N, à ce cercle a pour longueur le demi-diamètre conjugué à OM. *(E.-N. Barisien.)*

(*) Ces remarques sont trop simples pour être nouvelles ; elles ont été, bien probablement, déjà signalées. En les proposant, notre intention est d'appeler l'attention sur la figure remarquable, constituée par deux circonférences orthogonales. Il serait bon, croyons-nous, qu'une monographie fût faite des propriétés de cette figure ; ce sujet de travail plaira peut-être à quelqu'un de nos lecteurs et sa rédaction fournira la matière d'une note certainement intéressante.

777. — On considère un triangle ABC et les trois cercles exinscrits de centres O_A, O_B, O_C. Le cercle O_A touche le côté BC en A′, le cercle O_B touche le côté AC en B′, et le cercle O_C touche le côté AB en C′.

1° Les droites $O_A A'$, $O_B B'$, $O_C C'$ concourent en un même point I qui est le centre du cercle circonscrit au triangle $O_A O_B O_C$.

2° L'axe radical des cercles O_B et O_C passe par le milieu de BC. *(E.-N. Barisien.)*

778. — Dans tout trapèze dont les diagonales sont rectangulaires, la somme des carrés des diagonales est équivalente au carré de la somme des deux côtés parallèles.

(E.-N. Barisien.)

779. — Une ellipse est donnée par cinq points A, B, C, D, E. Quel nombre de points faut-il avoir à déterminer de la courbe pour qu'il soit, théoriquement, plus avantageux de placer d'abord les axes et les foyers de l'ellipse et d'employer alors la construction classique qui place les points ensemble, quatre par quatre, que de placer le même nombre de points par la construction déduite immédiatement de l'hexagramme de Pascal? *(E. Lemoine.)*

780. — Soient ABC un triangle équilatéral inscrit dans un cercle et P un point quelconque de la circonférence de ce cercle. Montrer que les orthocentres des quatre triangles ABC, PAB, PAC et PBC forment un quadrilatère égal au quadrilatère PABC. *(E.-N. Barisien.)*

ERRATUM

Ajouter à la fin de la p. 181 les lignes suivantes qui ont été coupées.

1° Exprimer en fonction de x la différence $\rho'^2 - \rho^2$; en déduire les expressions de ρ et ρ'.

2° Déterminer le centre de gravité G d'un fil homogène de longueur $2a$ passant par M et dont les extrémités sont F, F′.

3° Calculer la longueur de la projection du segment OG sur la direction OF.

4° Déduire des résultats précédents le lieu géométrique de G, lorsque M décrit l'ellipse.

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 17706-9-96.

SUR LES CERCLES BITANGENTS AUX CONIQUES

Par M. **A. Tissot.**

(*Suite*, voir page 217.)

13. — *Le lieu des nœuds d'un même cercle bitangent par rapport aux diverses droites tangentes à la conique se compose de deux circonférences ayant les foyers pour centres.*

Conservons, aux lettres de la *figure 3*, la signification qu'elles avaient sur la *figure 2*. Les lignes HΩ, NM, perpendiculaires à la tangente en M, sont parallèles, de sorte que le rapport de FH à FΩ est égal, comme celui de FN à FM, à l'excentricité e. Donc, bien que la position de Ω varie avec celle de M, la longueur de FΩ reste constante.

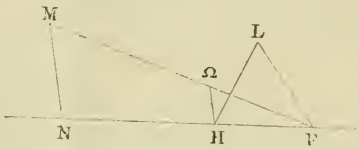


Fig. 3.

Soit L l'un des points de contact du cercle avec la conique; tirons FL. Le rapport de FH à FL est aussi égal à e [12], et l'on a FΩ = FL. Les deux circonférences lieux des nœuds passent donc par les extrémités de la corde des contacts, ce à quoi l'on devait s'attendre, puisqu'en L se confondent les nœuds du cercle par rapport à la tangente en ce point.

14. — *Il y a un rapport constant, égal à l'excentricité, entre la tangente menée d'un point quelconque de la conique à un cercle bitangent quelconque, et la distance du même point à la droite des contacts.*

La tangente menée de M (*fig. 2*) au cercle bitangent a même longueur que MΩ. Tirons ΩP. La circonférence décrite sur MU comme diamètre passerait aux points P et Ω, d'où résulte l'égalité des angles MPΩ, MUΩ; comme le second est égal à l'angle FMN, on aura $\widehat{MP\Omega} = \widehat{FMN}$. On a aussi $\widehat{\Omega MP} = \widehat{MFN}$, de sorte que les triangles MPΩ, FMN sont semblables. Le rapport de MΩ à MP est donc égal à celui de FN à FM, c'est-à-dire à e.

Il suit de là que la droite des contacts est l'un des axes de similitude des circonférences qui, ayant pour centres trois points quelconques de la conique, ont, pour rayons, les tangentes menées de ces points au cercle bitangent.

15. — *Suivant qu'un point sera intérieur ou extérieur à la conique, il y aura un rapport plus petit ou plus grand que l'excentricité entre la tangente menée de ce point à un cercle bitangent et la distance du même point à la droite des contacts.*

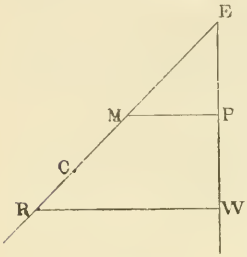


Fig. 4.

Soient R *(fig. 4)* le point considéré, C celui où la tangente menée de R touche le cercle, M l'un des points d'intersection de cette tangente avec la conique, E celui où elle rencontre la droite des contacts; abaissons, sur cette dernière ligne, les perpendiculaires MP, RW. Si nous désignons par λ le rapport qu'il s'agit d'étudier, par μ celui des distances MC, ME, et par ρ celui des distances RC, RE, nous aurons

$$\lambda = \frac{RC}{RW}, \qquad \mu = \frac{MC}{ME}, \qquad \frac{MC}{MP} = e, \qquad \frac{RC}{RE} = \rho;$$

d'où, multipliant membre à membre, et observant que les longueurs MP, RW sont proportionnelles à ME, RE,

$$\lambda\mu = e\rho.$$

L'un des points d'intersection M de la conique avec la tangente CE au cercle se trouve entre C et E; l'autre peut être sur le prologement de EC ou sur celui de CE. Le premier cas se présente toujours lorsque la conique est une ellipse ou une parabole; il se présente encore quand la conique est une hyperbole et que CE rencontre une seule branche; le second cas est celui où les deux points d'intersection appartiennent à deux branches différentes d'une hyperbole.

Premier cas. — Soient M, M′ *(fig. 5)* les deux points. Supposons d'abord R intérieur à la courbe; il sera situé entre M et M′, soit sur CM, soit sur CM′. S'il est sur CM, on aura

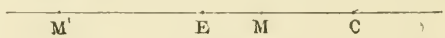


Fig. 5.

$\rho < \mu$. S'il est sur CM′, on aura $\rho < \mu'$, μ' désignant le rapport de M′C à M′E; mais la division E, M, C, M′ étant harmonique [3], μ' est égal à μ. Donc, pour toute position de R intérieure à la conique, on a $\rho < \mu$, et, par conséquent, $\lambda < e$.

Supposons maintenant R extérieur à la courbe; il sera, ou sur le prolongement de CM′, ou entre M et E, ou sur le prolongement de ME. S'il est sur le prolongement de CM′, on aura $\rho > \mu'$, c'est-à-dire $\rho > \mu$, et, par conséquent, $\lambda > e$. Si R est entre M et E, on aura encore $\rho > \mu$. Enfin, si R est sur le prolongement de ME, on aura $\rho > 1$; on a d'ailleurs $\mu < 1$, puisque M et M′ doivent se trouver d'un même côté du milieu du segment CE; il vient donc encore $\lambda > e$.

2e CAS. — Le point M′ *(fig. 6)* se trouve sur le prolongement de CE, et la figure présente la disposition que l'on obtiendrait si, dans celle du cas précédent, on faisait permuter les deux points C et E. Ce changement aurait pour effet de remplacer la valeur de μ et les diverses valeurs de ρ par leurs inverses; ici, ce sera donc pour R situé sur l'un ou l'autre des prolongements de MM′ que l'on aura $\lambda < e$, et, pour R compris entre M et M′, que l'on aura $\lambda > e$. Mais actuellement, ce sont les points compris entre M et M′ qui se trouvent à l'extérieur de l'hyperbole, de sorte que l'on est amené aux mêmes conclusions que dans le premier cas.

Fig. 6.

16. — *Il y a un rapport constant, égal à l'excentricité, entre la somme ou la différence des tangentes menées de deux points de la conique à un cercle bitangent, et la projection, sur l'axe focal, de la corde qui unit ces deux points.*

Dans l'énoncé, doit figurer la somme ou la différence des tangentes, suivant que la corde est rencontrée, par la droite des contacts, entre ses deux extrémités ou sur son prolongement.

Cette propriété résulte immédiatement de celle qui a été démontrée plus haut [14]. Il en est de même de la suivante.

17. — *Si l'on mène une corde de la conique tangente à un cercle bitangent, sa demi-longueur sera, avec la distance de son milieu à la droite des contacts, dans un rapport égal à l'excentricité.*

(A suivre.)

EXERCICES SUR LES DÉTERMINANTS (*)

Par M. **Elgé.**

(*Suite* et *fin*, voir p. 223.)

Pour terminer cet article qui pourrait être, non sans intérêt peut-être, notablement prolongé, nous indiquerons les résultats suivants, faciles à vérifier :

$$1^\circ \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{h-a} & \frac{1}{h-b} & \frac{1}{h-c} \\ \frac{1}{h'-a} & \frac{1}{h'-b} & \frac{1}{h'-c} \\ \frac{1}{h''-a} & \frac{1}{h''-b} & \frac{1}{h''-c} \end{vmatrix} = \frac{(h-h')(h'-h'')(h''-h)(a-b)(b-c)(c-a)}{(h-a)(h'-a)(h''-a)(h-b)(h'-b)(h''-b)(h-c)(h'-c)(h''-c)},$$

$$2^\circ \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 1 & b \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{b} & 1 \end{vmatrix} = \frac{(a-b)^2}{ab}, \quad 3^\circ \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 1 & b \\ \frac{a^2}{1} & b & 1 \end{vmatrix} = (b-a)\left(\frac{1}{a}-b\right);$$

$$4^\circ \quad \begin{vmatrix} 1 & a^2 & a^3 \\ 1 & b^2 & b^3 \\ 1 & c^2 & c^3 \end{vmatrix} = -(a-b)(b-c)(c-a)(ab+ac+bc),$$

$$5^\circ \quad \begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)(a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc).$$

(*) On trouvera plusieurs remarques sur les déterminants, notamment sur le déterminant de Vandermonde, dans le numéro de novembre de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*. Nous profitons de cette citation pour appeler l'attention des lecteurs du Journal sur cette publication, si intéressante, dirigée par nos amis Laisant et Lemoine.

$$6^\circ \begin{vmatrix} a & a+h & a+2h \\ b & b+h' & b+2h' \\ c & c+h'' & c+2h'' \end{vmatrix} = 0,$$

$$7^\circ \begin{vmatrix} a & b & ab \\ b & c & bc \\ c & a & ca \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(ab-ac)^2 + \frac{1}{2}(bc-ba)^2 + \frac{1}{2}(ca-cb)^2,$$

$$8^\circ \begin{vmatrix} a^2 & \frac{1}{b} & \frac{1}{c} \\ b^2 & \frac{1}{c} & \frac{1}{a} \\ c^2 & \frac{1}{a} & \frac{1}{b} \end{vmatrix} = \frac{a+b+c}{2abc}[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2],$$

$$9^\circ \begin{vmatrix} a^2 & \frac{1}{b^2} & \frac{1}{c^2} \\ b^2 & \frac{1}{c^2} & \frac{1}{a^2} \\ c^2 & \frac{1}{a^2} & \frac{1}{b^2} \end{vmatrix} = \frac{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2}{2a^2b^2c^2},$$

$$10^\circ \begin{vmatrix} a & b & a^2b^2 \\ b & c & b^2c^2 \\ c & a & c^2a^2 \end{vmatrix} = \left(\frac{ab+ac+bc}{2}\right)[(ab-ac)^2 + (bc-ba)^2 + (ca-cb)^2],$$

$$11^\circ \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ \frac{1}{a} & 1 & b \\ \frac{1}{a^2} & \frac{1}{b} & 1 \end{vmatrix} = \frac{(a-b)^2}{ab},$$

12° Si l'on considère le déterminant (*) $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ a_2 & a_3 & \dots & a_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_n & a_1 & \dots & a_{n-1} \end{vmatrix}$

dans lequel $a_1, a_2, \dots a_n$ sont en progression arithmétique de raison α,

on a $$\Delta = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (n\alpha)^{n-1} \frac{2a_1 + (n-1)\alpha}{2}.$$

(*) Communiqué par M. Bernès.

EXERCICES SUR UN TRIANGLE REMARQUABLE

Par M. **Jorge d'Avillez.**

Considérons un triangle ABC tel, que *la droite d'Euler* (*) soit parallèle au côté BC.

Soient :

a, b, c les côtés·

h_a, h_b, h_c les hauteurs,

h'_b, h'_c les segments des hauteurs compris entre les sommets B et C, et l'orthocentre H.

h''_b, h''_c les segments des hauteurs compris entre l'orthocentre et les côtés b et c.

R, r les rayons des cercles circonscrit et inscrit.

S l'aire du triangle.

M′, M″, M‴ les pieds des médianes et H′ le pied de la hauteur issue de A.

G, O, I les centres : de gravité, du cercle circonscrit et du cercle inscrit.

G′ le pied de la perpendiculaire abaissée de G sur BC.

ω le centre du cercle des neuf points et N le centre de gravité du périmètre du triangle.

On a les relations suivantes :

$$(1) \qquad h_a^2 = \frac{9}{4}(4R^2 - a^2),$$

$$(2) \qquad h_b h'_b + h_c h'_c = 2(a^2 - 3R^2) + \frac{b^2 + c^2}{2},$$

$$(3) \qquad h'_b h'_c = R\sqrt{4R^2 - a^2},$$

$$(4) \qquad h'_b + h'_c = 3(R + r) - \sqrt{4R^2 - a^2},$$

$$(5) \qquad h'^2_b + h'^2_c = 8R^2 - (b^2 + c^2),$$

(*) La droite d'Euler est celle qui passe par les points G, O, H.

Dans cette note, comme dans celle qui a été publiée à la page 225 du dernier numéro, l'auteur s'est proposé de fournir quelques éléments qui peuvent donner naissance à de nombreux exercices dont les énoncés peuvent d'ailleurs être dégagés, pour la commodité des élèves, des noms qui ont été introduits dans la Géométrie du Triangle et qui, pour la plupart, étaient indispensables à la clarté du langage. G. L.

(6) $$h_b''^2 + h_c''^2 = \frac{3(R + r)\sqrt{4R^2 - a^2} - 4R^2 + a^2}{2R},$$

(7) $$bc = 3R\sqrt{4R^2 - a^2},$$

(8) $$h_b + h_c = \frac{bc + a(b + c) - 3R\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R},$$

(9) $$h_a^2 = 18R^2 \cos A \cos B \cos C,$$

(10) $$a = 2R\sqrt{1 - 2\cos A \cos B \cos C},$$

(11) $$bh_b' + ch_c' = \frac{2}{3}\left(6S - aR\sqrt{18 \cos A \cos B \cos C}\right),$$

(12) $$\frac{b^2h_b'}{\sin B} + \frac{c^2h_c'}{\sin C} = 2R\left(4S - \frac{a^2}{3\sin A}\sqrt{18\cos A \cos B \cos C}\right),$$

(13) $$\overline{ON}^2 = \frac{a^2 + 4(r^2 - R^2)}{8},$$

(14) $$\overline{HI}^2 = \frac{a^2 + 4(r^2 - R^2)}{2},$$

(15) $$\overline{G'H'}^2 = 4R^2 - \frac{4}{9}(a^2 + b^2 + c^2),$$

(16) $$\overline{G'H}^2 = \overline{GH'}^2 = \frac{180R^2 - 16(b^2 + c^2) - 25a^2}{36},$$

(17) $$\overline{M'H'}^2 = 9R^2 - (a^2 + b^2 + c^3),$$

(18) $$\overline{\omega H'}^2 = \overline{\omega M'}^2 = \frac{13R^2 - 2a^2 - (b^2 + c^2)}{4},$$

(19) $$OM' = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - b^2},$$

(20) $$OM''' = \frac{1}{2}\sqrt{4R^2 - c^2},$$

(21) $$\overline{M'H}^2 = \overline{OH'}^2 = \frac{40R^2 - 5a^2 - 4(b^2 + c^2)}{4},$$

(22) $$\overline{M'G'}^2 = R^2 - \frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2),$$

(23) $$\overline{M'G}^2 = \overline{OG'}^2 = \frac{72R^2 - 13a^2 - 4(b^2 + c^2)}{36},$$

(24) $$\overline{GI}^2 = \frac{bc + a(b + c) + 4R^2 - 20Rr}{9}.$$

NOTICE HISTORIQUE

SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA MESURE

Par M. **Aubry**.

(*Suite*, voir page 227.)

PREMIÈRE MÉTHODE D'ARCHIMÈDE

La méthode d'exhaustion a d'abord été employée par Archimède d'une manière qu'on peut présenter ainsi :

(D) *Si les deux quantités variables* G, H *tendent l'une vers l'autre tellement que le rapport de la plus grande* G *à la plus petite* H *puisse devenir plus petit qu'un rapport donné quelconque; si, de plus, ces deux variables comprennent toujours entre elles une quantité fixe* Q *et si deux autres variables* g, h, *comprises entre les deux premières ou au plus égales comprennent elles-mêmes entre elles une quantité fixe* q, *les deux quantités* Q, q *sont égales.*

En effet, soit $Q > q$; on peut toujours supposer G et H de manière que leur rapport soit plus petit que celui de Q à q. On a ainsi

$$G > Q > H, \qquad G \geqslant g > q > h \geqslant H;$$

donc on aurait
$$\frac{G}{h} \leqslant \frac{G}{H} < \frac{Q}{q}.$$

L'inégalité $\frac{Q}{q} > \frac{G}{h}$ est inadmissible puisque $Q < G$ et $q > h$.

Par conséquent, l'hypothèse $Q > q$ est à écarter,

Soit maintenant $Q < q$; on peut écrire d'après cette supposition

$$\frac{q}{Q} > \frac{G}{H} \geqslant \frac{g}{H},$$

ce qui est faux à cause des relations $q < g$ et $Q > H$. On n'a donc pas non plus $Q < q$ et par suite, on a nécessairement $Q = q$.

Le même théorème a lieu si la différence $G - H$ peut devenir plus petite qu'une donnée quelconque.

Archimède s'appuie aussi sur les principes suivants :

(E) *La ligne droite est le plus court chemin d'un point à un autre. De deux lignes planes concaves du même côté, ayant mêmes extrémités et l'une étant comprise entre l'autre et la corde commune, la première est plus courte que l'autre* (*). *La même chose a lieu pour les surfaces.*

Il a appliqué cette méthode principalement à la mesure de la sphère. Voici ses principaux théorèmes :

I, II. — *Toute circonférence est plus petite que le contour d'un polygone circonscrit et plus grande que celui d'un polygone inscrit.* Conséquence de (E).

III. — *On peut toujours trouver deux droites* ZE, ZH *dont le rapport soit plus petit que celui de deux droites données* AB, ΓB. Ajoutons la différence AΓ un certain nombre de fois à elle-même jusqu'à ce qu'on ait une longueur supérieure à AB, chose toujours possible (B) (**). On répétera la longueur quelconque HE un même nombre de fois en EZ : les deux droites EZ, ZH sont dans les conditions demandées.

(fig. 6)

Fig. 6.

IV. — *On peut circonscrire à un cercle donné un polygone tel que le rapport de son côté à celui du polygone inscrit semblable soit plus petit que le rapport de* A *à* B. Le triangle rectangle KΛM *(fig. 7)* étant tel que (III) on ait

$$\frac{KM}{K\Lambda} < \frac{A}{B},$$

on bissectera successivement le quadrant ΔΓ jusqu'à ce que l'angle NHΓ ainsi obtenu soit plus petit que le double de l'angle ΛKM : l'arc NΓ est l'arc cherché.

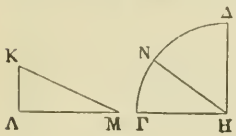


Fig. 7.

VI. — *On peut circonscrire à un cercle donné un polygone dont le rapport au polygone inscrit semblable soit plus petit que celui de* E *à* Z. On n'a qu'à circonscrire et inscrire deux polygones

(*) Nous espérons donner prochainement une étude de ces principes.

(**) Page 204.

semblables tels que les côtés soient dans un rapport plus petit que celui de Γ à H (IV), Γ et H étant déterminés par les relations

$$\frac{\Gamma}{\Delta} < \frac{E}{Z}, \qquad H = \sqrt{\Gamma\Delta}.$$

VII. — *On peut toujours circonscrire à un cercle un polygone régulier dont la surface n'excède celle du cercle que d'une quantité plus petite qu'une surface donnée.* Conséquence de VI.

VIII, IX. — Surface latérale des pyramides inscrites et circonscrites à un cône.

X, XI, XII, XIII. — *La surface latérale d'un cône (ou d'un cylindre) est comprise entre celle d'une pyramide (ou d'un prisme) inscrit et celle de la pyramide (ou du prisme) circonscrit semblable.* Considérons, par exemple, le cône ayant le cercle AΓ *(fig. 8)*, pour base, et dont nous appellerons Δ le sommet : le triangle AΔΓ est plus petit que la surface latérale comprise entre les génératrices ΔA, ΔΓ. En effet, soient B le milieu de l'arc AΓ et Θ l'excès de la somme des triangles AΔB, BΔΓ sur le triangle AΔΓ. Bissectons les arcs AB, BΓ jusqu'à ce que la surface totale des segments ainsi déterminés soit plus petite que Θ, ce qui est toujours possible. D'après (E), la surface de ces segments ajoutée à la partie de la surface ΔA BΓ du cône est plus grande que la surface des triangles latéraux correspondants de la pyramide. Donc, *a fortiori*, la surface conique en question est plus grande que le triangle AΔΓ augmenté de la différence entre les triangles de la pyramide et des triangles AΔB, BΓA.

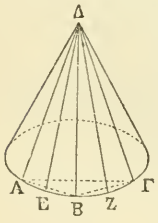


Fig. 8.

Le reste se démontre de même.

XIV. — *La surface latérale du cylindre est égale au cercle* B *dont le rayon est moyen proportionnel entre le diamètre et la hauteur.* Soit A la base. Supposons B plus petit que la surface latérale proposée. Circonscrivons et inscrivons à B deux polygones semblables qui soient dans un rapport plus petit que celui de la surface cylindrique au cercle B (VI), et à A

un polygone semblable. La surface latérale du prisme semblable inscrit au cylindre est égale à celle du polygone inscrit à B. On aurait donc

$$\frac{\text{surf. prisme circ}^t}{\text{pol. insc}^t \text{ à B}} < \frac{\text{surf. cyl.}}{\text{B}},$$

inégalité impossible puisque surf. cyl. < surf. prisme circ^t et pol. insc^t < B.

Supposons B > surf. cyl. et soit

$$(\alpha) \qquad \frac{\text{pol. circ}^t \text{ à B}}{\text{pol. insc}^t \text{ à B}} < \frac{\text{B}}{\text{surf. cyl.}}.$$

Archimède fait voir que d'après cette supposition

pol. insc^t à B < surf. prisme insc^t < surf. cyl.,

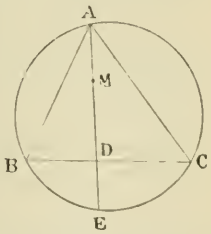
conclusion inadmissible à cause de (α), puisque pol. circ^t à B > B. *(A suivre.)*

CORRESPONDANCE

Extrait d'une lettre de M. Bernès :

La solution Barisien (p. 169) n'est certainement pas neuve, mais elle est très simple, et elle s'applique, sans modification notable, au calcul de la puissance M_0 d'un point quelconque M du plan relativement au cercle ABC. Si ce point est défini par le rapport suivant lequel AM divise BC en D, $\frac{DB}{DC} = -\frac{n}{m}$ et par le rapport suivant, lequel M divise AD, $\frac{MA}{MD} = -\frac{m+n}{l}$ (ce qui revient à dire que les coordonnées barycentriques sont proportionnelles à l, m, n); la formule est

$$M_0 = -\frac{mna^2 + nlb^2 + lmc^2}{(l+m+n)^2}.$$



Soit E le point où AD rencontre la circonférence ABC. La relation de Stewart donne $mc^2 + nb^2 = (m+n)\text{AD}.\text{AE}$.

On a d'ailleurs

$$mna^2 = (m+n)^2\text{BD}.\text{DC} = (m+n)^2\text{AD}.\text{DE}.$$

Si l'on ajoute ces deux égalités après avoir multiplié la première par l, il vient

$$\Sigma.mna^2 = (m+n)\mathrm{AD}[l.\mathrm{AE} + (m+n)\mathrm{DE}].$$

Or
$$\frac{\mathrm{MD}}{l} = \frac{\mathrm{AM}}{m+n} = \frac{\mathrm{AD}}{l+m+n},$$

d'où
$$(m+n)\mathrm{AD} = (l+m+n)\mathrm{AM}.$$

D'ailleurs

$$l.\mathrm{AE} = l.\mathrm{AD} + l.\mathrm{DE} = (l+m+n)\mathrm{MD} + l.\mathrm{DE};$$

on a donc

$$l.\mathrm{AE} + (m+n)\mathrm{DE} = (l+m+n)\mathrm{ME};$$

et finalement

$$\Sigma.mna^2 = (l+m+n)^2\mathrm{AM}.\mathrm{ME},$$

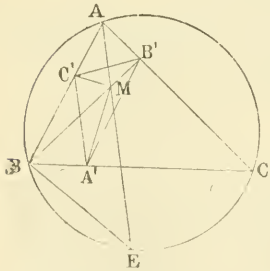
ou
$$\mathrm{M}_0 = -\frac{\Sigma.mna^2}{(l+m+n)^2}.$$

Remarque. — Si S′ est l'aire du triangle podaire de M, on a aussi $\mathrm{M}_0 = -4\mathrm{R}^2.\frac{\mathrm{S}'}{\mathrm{S}}$, relation aisément réductible à la précédente, mais dont il est intéressant de donner aussi une démonstration élémentaire directe.

Écartons d'abord la considération des signes de M_0 et $\frac{\mathrm{S}'}{\mathrm{S}}$.

Soient a', b', c' les côtés du triangle A′B′C′ podaire de M. Dans le triangle MBE l'angle E est égal à l'angle C de ABC et l'angle B à l'angle C′ de A′B′C′. En conséquence

$$\frac{\text{aire MBE}}{\mathrm{S}} = \frac{\mathrm{EB}.\mathrm{EM}}{ab} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{S}'}{\text{aire MBE}} = \frac{a'b'}{\mathrm{BM}.\mathrm{BE}},$$



d'où
$$\frac{\mathrm{S}'}{\mathrm{S}} = \frac{a'b'}{ab}.\frac{\mathrm{EM}}{\mathrm{BM}}.$$

Mais $\frac{a'}{a} = \frac{\mathrm{AM}}{2\mathrm{R}}$; $\frac{b'}{b} = \frac{\mathrm{BM}}{2\mathrm{R}}$.

Donc
$$\frac{\mathrm{S}'}{\mathrm{S}} = \frac{\mathrm{AM}.\mathrm{EM}}{4\mathrm{R}^2}.$$

Il ne reste plus qu'à voir que M_0 et $\frac{\mathrm{S}'}{\mathrm{S}}$ sont toujours de signes contraires. Et, en effet, si M est intérieur au cercle ABC, M_0 est négatif, tandis que S′ et S ayant même sens rota-

toire, $\frac{S'}{S}$ est positif; et si M est extérieur, M_0 est positif et $\frac{S'}{S}$ négatif.

Ainsi $$\frac{S'}{S} = -\frac{M_0}{4R^2}.$$

Une dernière remarque :

La question 756 peut être généralisée en disant : *Dans un triangle quelconque* ABC, *la bissectrice de* A *coupant* BC *en* K *et la circonférence* ABC *en* D, *et* O *étant le centre du cercle inscrit à* ABC, *si* AO *est double de* KD, *on a* $a = \frac{b+c}{2}$.

$\left(\text{Dans tout triangle } \frac{AO}{KD} = \frac{(b+c-a)(b+c)}{a^2}\right)$.

BACCALAURÉATS

(Session d'avril 1896)

Académie d'Aix (Faculté de Marseille).

Deux sphères de centres fixes se touchent extérieurement. Une troisième sphère les enveloppe et les trois centres sont en ligne droite. Démontrer que cette troisième sphère a un rayon constant. Déterminer le maximum et le minimum de la somme des volumes des deux premières sphères.

Académie d'Alger.

Questions au choix : (*a*) Exprimer sin x et cos x : 1° en fonction de tg x; 2° en fonction de tg $\frac{x}{2}$.

(*b*) Rendre calculable, par logarithmes, une somme ou une différence : 1° de deux sinus; 2° de deux cosinus; 3° de deux tangentes.

(*c*) Résoudre un triangle connaissant les trois côtés.

Problème. — Deux corps pesants partent en même temps de deux points élevés de la même hauteur au-dessus de l'horizon. L'un suit la verticale sans vitesse initiale; l'autre est assujetti à descendre le long d'un plan incliné avec une vitesse initiale v_0 donnée.

1° Déterminer l'inclinaison α du plan par la condition que les deux mobiles atteignent en même temps l'horizon. Application au cas où l'on aurait $v_0 = \sqrt{2gh}$.

2° Calculer, en secondes, le temps que mettent les deux mobiles pour atteindre l'horizon en supposant

$$g = 9^m,8 \quad \text{et} \quad h = 10^m.$$

Académie de Besançon.

Questions au choix :

1° Polygones réguliers. Démontrer qu'il existe des polygones réguliers d'un nombre quelconque de côtés;

2° Inscription du carré, de l'hexagone, du triangle équilatéral, du décagone, du pentédécagone.

3° Deux polygones réguliers d'un même nombre de côtés sont semblables.

Problème. — Mener, par un point de l'espace, une droite perpendiculaire à une droite donnée.

Académie de Bordeaux.

Questions au choix :

1° L'ellipse, tangentes parallèles;

2° Parabole, même question;

3° Hélice. Propriété de la tangente.

Problème. — Montrer qu'il existe des valeurs imaginaires des quantités x, y, u, v satisfaisant aux équations

$$1 + x + y = 0; \qquad 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = 0;$$

$$1 - u + v = 0; \qquad 1 + \frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 0;$$

$$1 + \frac{x}{u} + \frac{y}{v} = 0; \qquad 1 + \frac{u}{x} + \frac{v}{y} = 0;$$

Académie de Clermont.

(A). — *Questions au choix :* 1° Angle de deux plans.

2° Angle de deux droites.

3° Angle d'une droite et d'un plan.

Problème. — Une pyramide régulière a pour base un décagone régulier de côté a. Chaque arête latérale est égale au côté du pentagone régulier inscrit dans le même cercle que le décagone de base. On demande de calculer :

1° La surface latérale de la pyramide;

2° Son volume;

3° Le rayon de la sphère inscrite;

4° Le rayon de la sphère circonscrite.

(B). — *Questions au choix :* 1° Tangente à l'ellipse.

2° Tangente à la parabole.

3° Sous-normale à la parabole.

Problème. — Trouver entre quelles limites peuvent varier les valeurs de x, y, z, supposées réelles toutes les trois et satisfaisant aux deux équations:

$$x + y + z = a, \qquad x^2 + y^2 + z^2 = b?$$

Académie de Dijon.

Questions au choix. — 1° Calcul de π.

2° Trièdres supplémentaires.

3° Relation de grandeur entre les faces d'un trièdre.

Problème. — Construire un triangle connaissant la médiane, la bissectrice et la hauteur menée d'un même sommet.

Académie de Grenoble.

Questions au choix. — 1° Mener, d'un point donné P, les tangentes à une parabole définie par son foyer F et sa directrice D.

2° Mener, d'un point donné P, les tangentes à une ellipse définie par son grand axe AA′ et ses foyers F, F′.

3° Démontrer que la tangente à l'ellipse fait des angles égaux avec les rayons vecteurs aboutissant au point de contact.

Problème. — On donne un cercle O, une tangente T qui le touche en B et une parallèle Ox à BT menée par le centre O du cercle. Trouver sur Ox un point M tel que le trapèze OMNB formé avec OB, OM, NB par une tangente MN menée du point M au cercle ait une aire donnée m. — Discussion.

Académie de Lille.

Questions au choix. — *A.* Ce qu'on appelle latitude géographique d'un lieu. — Ayant à sa disposition un théodolite, comment peut-on, dans un lieu donné : 1° déterminer la direction du méridien, 2° mesurer la latitude?

B. Ce qu'on appelle déclinaison d'un astre : sa détermination dans un lieu où l'on connaît la latitude et la direction du méridien. Sachant que la latitude de Lille est 50° 38′ 44″, trouver : 1° la déclinaison d'une étoile qui passe au zénith de Lille ; 2° celle d'une étoile qui décrit le cercle de perpétuelle apparition.

C. Le 5 novembre 1895, la déclinaison du soleil est australe et égale à 15° 24′ 0″. D'après cela trouver, pour ce même jour : 1° la hauteur du soleil à midi pour Lille dont la latitude est égale à 50° 38′ 44″ ; 2° tous les points de la terre qui voient le soleil passer à leur zénith ; 3° tous les points de la terre pour lesquels le soleil ne se lève pas.

Problème. — Un point M d'une ellipse donnée étant situé à une distance r de l'un des foyers, trouver ses distances aux deux axes de l'ellipse et déterminer r de manière que le produit de ces distances soit égal à un carré donné.

BACCALAURÉAT CLASSIQUE *(LETTRES-MATHÉMATIQUES)*
ET BACCALAURÉAT MODERNE *(LETTRES-MATHÉMATIQUES)*

(Octobre 1896.)

1° *Problème obligatoire :*

Calculer les coefficients d'un trinôme de second degré en x, sachant que le coefficient du terme en x est égal à la somme des deux autres coefficients, que le trinôme prend pour $x = 1$ une valeur donnée v, et que sa valeur maxima *ou* minima est un nombre donné μ. Discuter.

2° *Trois sujets à choisir :*

a) 1° Couples : un couple n'a pas de résultante ; composition et décomposition des couples.

b) 2° Balance de Roberval.

c) 3° Équilibre d'un corps placé sur un plan incliné.

BACCALAURÉAT MODERNE *(LETTRES-SCIENCES)*.

(Octobre 1896.)

Deuxième partie. — Deuxième série.

1° *Problème obligatoire :*

Un corps dont le poids est Q descend d'un mouvement uniforme le long d'un plan incliné d'un angle i sur l'horizon; ce corps est sollicité par une force P appliquée aussi à son centre de gravité et inclinée d'un angle a sur le plan incliné. Cette force empêche le mouvement du corps de s'accélérer; ce corps est également soumis à l'action du frottement dont l'angle est φ. On demande d'exprimer l'intensité de la force P, puis la direction qui correspond à la plus petite valeur qu'il faut lui donner pour maintenir le mouvement uniforme. Trouver cette plus petite valeur dans le cas de $i = 60°$ et $\varphi = 15°$.

2° *Trois sujets à choisir :*

a) Établir l'équation de l'ellipse rapportée à ses axes. Projection orthogonale du cercle.

b) Intersection d'une droite et d'une parabole; en déduire la propriété essentielle de la tangente en un point à la parabole.

c) Définition de l'hélice. — Propriété de la tangente et de la sous-tangente.

QUESTION 671

Solution par M. X.

Dans un triangle ABC, *on considère deux points* M, M′ *symétriques l'un de l'autre relativement au milieu de* BC. *Montrer que la condition nécessaire et suffisante pour que les droites* AM, AM′ *soient isogonales, est que les angles* ABM, ACM *soient égaux et de sens contraires.*

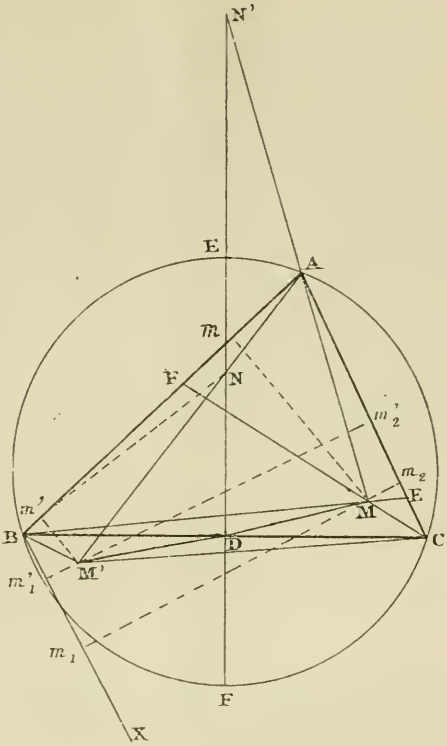
En conclure le lieu des isogonaux N, N′ *de deux points* M, M′ *symétriques relativement au milieu de* BC *et tels que* AM, AM *soient deux droites isogonales. Quelle est, sur ce lieu, la situation relative de* N *et* N′? *Montrer que les deux points* M, M′ *sont isoptiques (ou jumeaux).* (Bernès).

Soient les angles ABM, ACM égaux et de signes contraires, menons BX parallèle à AC, l'angle M′BX étant égal à l'angle AMC, les droites BM et BM′ sont isogonales relativement à l'angle ABX. On a donc

$$Mm.M'm' = Mm_1.M'm'_1.$$

Mais on a, évidemment, $Mm_1 = M'm'_2$, $M'm'_1 = Mm_2$, par suite $Mm.M'm' = M'm'_1.Mm_2$ et les deux droites AM, AM′ sont isogonales.

Reprenant la démonstration en sens inverse, on voit que la condition est nécessaire.



Si N et N′ sont les isogonaux de M et M′, les triangles NBC et N′BC sont évidemment isoscèles et le lieu de N, N′, est la médiatrice de BC. Ils sont placés d'ailleurs aux points d'intersection de cette médiatrice avec les deux isogonales AM′, AM et par suite conjugués par rapport aux points E, F, où les bissectrices de $\widehat{BAC}$ coupent la médiatrice de BC.

Les angles BMC, BM′C sont égaux. On a

$$\widehat{AMC} = 2^{\text{droits}} - (\widehat{MAC} + \widehat{MCA}),$$

$$\widehat{AM'C} = 2^{d} - (\widehat{A} - \widehat{BAM'}) - (\widehat{C} + \widehat{BCM'})$$

$$= 2^{d} - (\widehat{A} + \widehat{C}) - \widehat{BCM'} + \widehat{MAC} = \widehat{B} - \widehat{CBM} + \widehat{MAC} = \widehat{MCA} + \widehat{MAC}.$$

Donc $$\widehat{AMC} + \widehat{AM'C} = 2^{\text{droits}}.$$

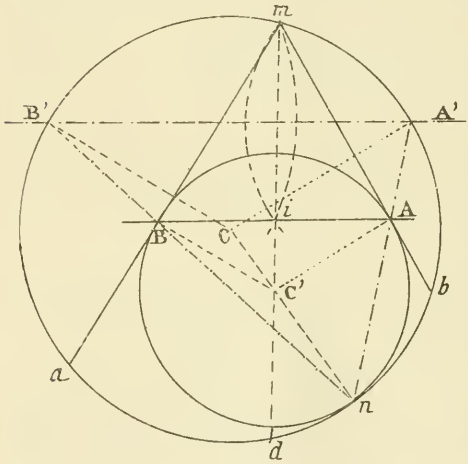
QUESTION 673

Solution par M. A. Droz-Farny.

On donne une circonférence de cercle C *et deux points* a *et* b *sur cette courbe. On mène les droites* am, bm *qui aboutissent au point* m *de* C. *On décrit une circonférence de cercle tangente à* C *et à ces droites. On prend la corde de contact de ce cercle et de ces droites. Démontrer que lorsque* m *décrit* C, *cette corde de contact reste tangente à une circonférence de cercle.*

(Mannheim.)

Soient C et C′ les centres des deux circonférences, n, A, B les points de contact de C′ avec C, mb, ma; A′ et B′ les milieux des arcs mb et $ma.n$ étant le point de similitude directe des circonférences C et C′, on a : 1° les trois points n, A, A′ sont en ligne droite, de même n, B et B′; 2° la circonférence mab pouvant être considérée comme l'inverse de la droite mb, on aura : $\overline{A'A.A'n} = \overline{A'm}^2$ et de même, $\overline{B'B.C'n} = \overline{B'm}^2$. Les points A′ et B′ sont donc d'égale puissance par rapport au cercle point m et au cercle C′, il en résulte que A′B′ divise en parties égales les tangentes mA et mB. Les circonférences décrites de A′ et B′ comme centres, avec mA′ et mB′ comme rayons se croiseront sur AB en un point i centre de la circonférence inscrite au triangle mab.



La bissectrice mi de l'angle m, perpendiculaire sur AB, coupe l'arc ab en son point milieu d; mais on sait que l'arc décrit de d comme centre avec $da = db$ comme rayon passe par i et sera, par conséquent, tangent en ce point à AB. Cette circonférence étant fixe, on conclut qu'elle est l'enveloppe de la droite AB et le lieu des cercles inscrits aux triangles mab.

Autrement (*). — Soit p le milieu de l'arc ab: la droite mp passe par le centre du cercle Γ inscrit à l'angle amb et tangent à C; soit q le point où elle coupe la polaire de m par rapport à Γ. Transformons la figure par inversion en prenant m pour pôle et K^2 pour module: Γ a pour transformée, une circonférence Γ' dont le centre q' est corrélatif de q, et la transformée de C est une tangente menée à Γ' par le corrélatif p' de p. La distance du point m à cette tangente est évidemment:

$$\frac{\overline{mp'}}{\overline{q'p'}} \cdot \rho$$

ρ désignant le rayon de Γ'. Désignons l'angle amb par 2θ et par $2R$ le diamètre de C; on voit que:

$$2R = \frac{K^2 \cdot \overline{q'p'}}{\overline{mp'} \cdot \rho} = \frac{K^2 \cdot \overline{p'q'}}{\overline{mq'} \cdot \overline{mp'}} \cdot \frac{\overline{mq'}}{\rho} = \frac{\overline{pq}}{\sin\theta}$$

d'où $$\overline{pq} = 2R \sin\theta = \overline{pa}.$$

Quand m décrit C, on voit donc que l'enveloppe cherchée se compose des deux circonférences passant par a et b ayant leurs centres sur C.

QUESTION 678

Solution par M. Ernest Foucart.

Étant donnée une ellipse E, *on projette le centre* O *de* E *en* P *et* Q *sur la tangente et sur la normale tracées en un point* M *de* E; *on prolonge le rayon* OM *de* MM′ = OM. *Montrer que les quatre droites suivantes :*

1° La polaire δ_1 *du point* P *par rapport à* E;

(*) Cette solution est de M. Ernest Duporcq.

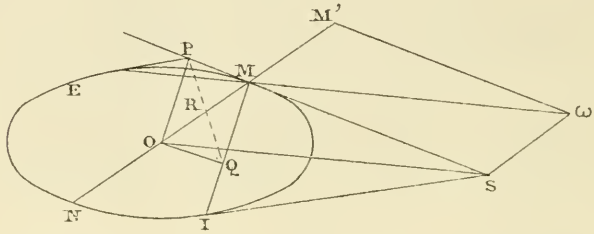
2° La polaire δ_2 du point Q *par rapport à* E;

3° La droite δ_3 menée par M′ *parallèlement à la tangente en* M;

4° La parallèle δ_4 à OM *menée par le pôle de la corde normale en* M;

concourent en un même point. (E.-N. Barisien.)

La parallèle à OM menée par le point S, pôle de la normale, est la polaire du point Q, puisque OM est diamètre conjugué de la direction OQ; OS est le diamètre conjugué



de la direction OP, donc la polaire de P est la parallèle à OS menée par M; OMSω est un parallélogramme. Sω = OM = MM′ et la droite M′ω est la parallèle à la tangente menée par M′; donc, etc...

Autrement (*). — Soit R le point d'intersection des diagonales du rectangle POQM et N la seconde extrémité du diamètre MO. Tout point situé sur MO a sa polaire parallèle à la tangente en M; or $\frac{M'M}{M'N} = \frac{RM}{RN} = \frac{1}{3}$, donc $(M'MRN) = -1$; la parallèle menée par M′ à la tangente en M est donc la polaire du point R.

Soit S le pôle de la corde normale en M; toute droite menée par S aura son pôle sur MQ, toute parallèle à OM a son pôle sur le diamètre OQ conjugué de OM, par conséquent la parallèle menée par S parallèlement à OM a son pôle en Q; la droite δ_4 coïncide avec la droite δ_2.

Les polaires δ_1, δ_2, δ_3 des points P, Q, R en ligne droite concourent en un même point, le pôle de PQR.

Nota. — Solutions analogues par MM. Foucart et G. Tzitzéica.

(*) Cette solution est de M. Droz-Farny.

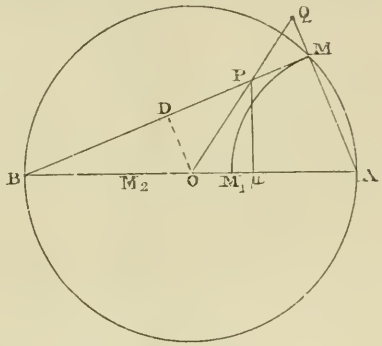
QUESTION 680

Solution par M. L'Huillier.

On considère, dans un cercle O, *un diamètre fixe* AB. *Un point variable* M *parcourt la circonférence de ce cercle. Soit* M_1 *un point de* AB, *situé entre* A *et* B *et tel que* $AM_1 = AM$. *Si* M_2 *est l'isotomique de* M_1 *sur* AB, *la perpendiculaire au milieu de* AM_2 *coupe* BM *en* P.

Le lieu du point Q *d'intersection de* PO *et* AM *est un cercle.*

(Davidoglou.)



Menons OD perpendiculaire à MB. On a

$$2O\mu = OA - OM_2 = OA - OM_1 = AM,$$

donc $O\mu = \dfrac{AM}{2} = OD$.

Les triangles PDO et $P\mu O$ sont égaux et

$$\widehat{PO\mu} = \widehat{POD} = \widehat{PQA},$$

d'où $AQ = AO$. Le lieu cherché est le cercle, de centre A, passant par O.

Nota. — Autre solution par M. E. Foucart.

QUESTION 682

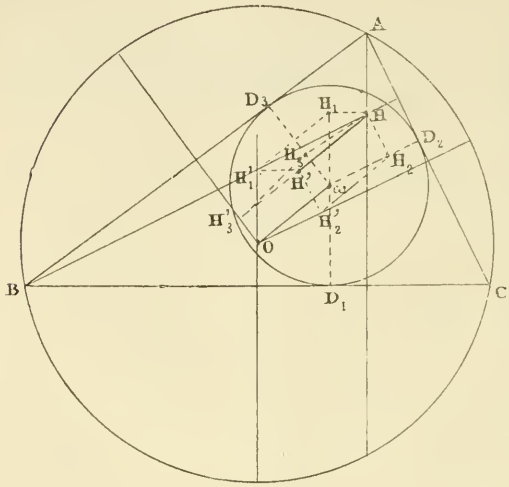
Solution par M. Ernest Foucart.

Le cercle inscrit ω *dans un triangle* ABC *touche les côtés aux points* D_1, D_2, D_3. *Par les points* H_1, H_2, H_3 *où les perpendiculaires abaissées de l'orthocentre* H *sur* ωD_1, ωD_2, ωD_3 *coupent respectivement* ωD_1, ωD_2, ωD_3, *on mène des parallèles* $H_1H'_1$, $H_2H'_2$, $H_3H'_3$ *à* $O\omega$ *(O étant le centre du cercle circonscrit) et qui rencontrent les médiatrices correspondantes aux points* H'_1, H'_2, H'_3.

Les perpendiculaires menées, par ces points, à ces mêmes médiatrices, concourent en un même point. (Davidoglou.)

SOLUTION ANALYTIQUE

Soient h''_a, h''_b, h''_c, les coordonnées normales absolues de l'orthocentre H. L'équation de la perpendiculaire à la médiatrice correspondant à H'_1 et menée par ce point est visiblement



$$x = \frac{h_a + h''_a}{2} - r.$$

Les équations des deux autres droites sont de même

$$y = \frac{h_b + h''_b}{2} - r$$

$$z = \frac{h_c + h''_c}{2} - r.$$

On en déduit

$$\Sigma ax = \frac{1}{4}\Sigma ah_a + \frac{1}{2}\Sigma ah''_a - 2pr,$$

et $\Sigma ah_a = 6S \qquad \Sigma ah''_a = 2S \qquad pr = S,$

d'où $\Sigma ax = 2S$; donc les droites considérées sont concourantes.

Autrement (*). — La solution se déduit immédiatement de l'examen de la figure. Menant par le point H une parallèle à Oω, on voit que la perpendiculaire en H'_1 à la médiatrice de BC coupe cette parallèle en H′ tel que HH′ = Oω.

Il en est de même des deux autres.

(*) Cette solution est de M. L'Huillier.

QUESTION 687

Solution par M. A. Droz-Farny.

Si, dans un triangle, le triple d'un côté égale la somme des autres, le cercle inscrit est tangent au cercle inscrit dans le triangle ayant pour sommets les milieux des côtés du triangle donné.

(Davidoglou.)

Représentons par I et I′ les centres des deux cercles considérés, par r et r' leurs rayons et par G le centre de gravité. Le triangle donné et son complémentaire étant en homothétie inverse avec G comme centre et $\frac{1}{2}$ comme rapport, on trouve que I, G, I′ sont en ligne droite et que

$$II' = \frac{3}{2} IG \qquad \text{et} \qquad r = 2r'.$$

Les cercles seront donc tangents si $2II' = r$, d'où $\overline{9IG}^2 = r^2$.

Mais on sait que $9\overline{IG}^2 = p^2 + 5r^2 - 16Rr$.

Pour que les cercles soient tangents, on doit donc avoir la relation

$$p^2 = 4r^2 - 16Rr = 0,$$

ou

$$p^2 = \frac{4abc}{p} - \frac{4S^2}{p^2},$$

ou

$$p^4 = 4abcp - 4p(p-a)(p-b)(p-c),$$

ou enfin

$$p^3 = 4abc + 4(p-a)(p-b)(p-c) = 0.$$

On constate aisément que cette expression développée peut se mettre sous la forme

$$(3a - b - c)(3b - a - c)(3c - a - b) = 0,$$

relation qui prouve le théorème énoncé.

QUESTIONS PROPOSÉES

781. — Trouver l'aire du triangle formé par le point de rencontre des diagonales et les points de rencontre des côtés opposés d'un quadrilatère inscriptible. — Dans quel cas l'aire de ce triangle est-elle équivalente à celle du quadrilatère?

(E.-N. Barisien.)

782. — On donne trois droites concourantes IA, IB, IC de longueurs α, α', α'', formant des angles ω, ω', ω''. Par les

points A, B, C, on mène des droites respectivement perpendiculaires à AI, BI, CI. L'aire S du triangle formé par ces trois droites a pour expression

$$S = \frac{(\alpha \sin\omega + \alpha' \sin\omega' + \alpha'' \sin\omega'')^2}{2 \sin\omega \sin\omega' \sin\omega''},$$

et le rayon de son cercle circonscrit est

$$R = \frac{\alpha \sin\omega + \alpha' \sin\omega' + \alpha'' \sin\omega''}{2 \sin\omega \sin\omega' \sin\omega''}.$$

(E.-N. Barisien.)

783. — Etant donné un triangle ABC, on décrit les trois cercles de centres A, B, C et de rayons respectifs $p - a$, $p - b$, $p - c$.

1° Si ρ_1 et ρ_2 désignent les rayons des deux cercles tangents aux trois cercles A, B, C, et si r est le rayon du cercle inscrit à ABC, on a

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{4}{r}.$$

2° Les tangentes communes à ces cercles, considérés deux à deux forment divers triangles. Le triangle formé par des tangentes communes extérieures et renfermant les cercles A, B, C en son intérieur, a pour expression du rayon de son cercle inscrit

$$\rho = \frac{\sqrt{p} + \sqrt{p-a} + \sqrt{p-b} + \sqrt{p-c}}{\frac{1}{\sqrt{p-a}} + \frac{1}{\sqrt{p-b}} + \frac{1}{\sqrt{p-c}}} \quad (*)$$

(E.-N. Barisien.)

ERRATUM

Au § 11, *p. 223* le dernier élément de la première colonne est $4p$;

De plus, *p. 224, l. 10*, dans la formule qui donne Δ, le deuxième facteur du numérateur n'est pas $p + 1$, mais $2 + \frac{(4p-1)^2}{K-1}$.

(*) Les diverses combinaisons de signe des 4 radicaux $\sqrt{p}$, $\sqrt{p-a}$, $\sqrt{p-b}$, $\sqrt{p-c}$ donnent les huit valeurs des rayons des cercles inscrits aux huit triangles formés par les tangentes communes extérieures aux cercles A, B, C, considérés deux à deux.

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 19726-10-96.

SUR LES CERCLES BITANGENTS AUX CONIQUES

Par M. A. Tissot.

(*Suite*, voir page 241.)

18. — Appelons a la demi-longueur du premier axe, b la moyenne proportionnelle entre les distances d'une de ses extrémités aux foyers, c la demi-distance focale.

Le rayon d'un cercle bitangent est, avec la moyenne proportionnelle entre les distances de son centre aux foyers, dans le rapport de b *à* c.

Les lettres de la *figure 7* ayant la même signification que celles de la *figure 2*, abaissons, des foyers, sur la tangente TU, les perpendiculaires FQ, F′Q′, et joignons leurs pieds au centre O. Les triangles FHΩ, OF′Q′ sont semblables

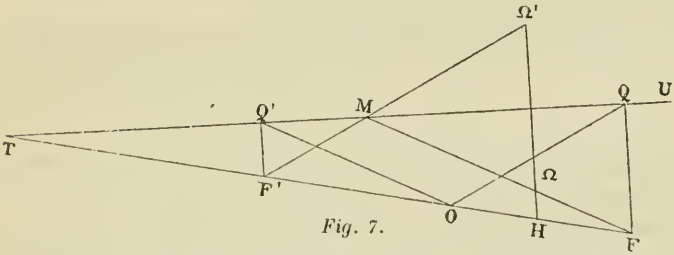


Fig. 7.

entre eux, ainsi que les triangles F′HΩ′, OFQ, et l'on a

$$H\Omega = \frac{F'Q'}{c}\,HF, \quad H\Omega' = \frac{FQ}{c}\,HF';$$

mais, r désignant le rayon du cercle bitangent, on a aussi [7]

$$r^2 = H\Omega . H\Omega';$$

il vient donc

$$r^2 = \frac{b^2}{c^2}\,HF . HF'.$$

Lorsque la conique est une ellipse, la somme HF + HF′ étant constante, le *maximum* de r a lieu pour HF = HF′, ce qui donne le cercle décrit sur le petit axe comme diamètre.

Dans la parabole, le rayon d'un cercle bitangent est moyenne proportionnelle entre la distance de son centre au foyer et le

double du paramètre. En effet, ledit rayon forme un côté de l'angle droit d'un triangle rectangle dont l'hypoténuse est double de cette distance, et sa projection sur cette hypoténuse est égale au paramètre.

19. — *Le saillant est le conjugué harmonique du centre du cercle bitangent par rapport aux deux foyers.*

Cela résulte de ce que la tangente et la normale en un point d'une conique sont bissectrices des angles des rayons vecteurs de ce point.

20. — *La droite des contacts est la polaire du saillant par rapport au cercle principal.*

En effet, elle est déjà la polaire du saillant par rapport au cercle bitangent et par rapport à la conique. Mais le cercle principal est lui-même un cercle bitangent ayant le premier axe pour droite des contacts. Le saillant, qui se trouve sur cet axe, aura donc même polaire par rapport au cercle principal que par rapport à la conique [1].

On vient de voir que la polaire d'un point quelconque du premier axe est la même dans le cercle principal et dans la conique. Or, sur le premier axe, il ne peut y avoir deux couples de points jouissant chacun de la propriété de diviser harmoniquement et le diamètre du cercle principal et celui du cercle bitangent. Donc, le saillant et le milieu de la corde des contacts sont les seuls points de cet axe qui aient même polaire dans le cercle bitangent et dans la conique. Ainsi se trouve complétée, pour les cercles de première espèce, la démonstration du § 5.

21. — *Les distances du centre d'un cercle bitangent à la droite des contacts, et du centre de la conique au saillant, ont pour moyenne proportionnelle* b.

Les lettres O, F, F′, H, K, L *(fig. 8)* conservant la signification que nous leur avons attribuée jusqu'à présent, soit de plus S le saillant; menons HG perpendiculaire à l'axe jusqu'à sa rencontre, en G, avec la circonférence décrite sur FF′ comme diamètre; tirons le rayon OG et SG, qui sera tangent à la circonférence. On a

$$HF.HF' = \overline{HG}^2 = OH.HS, \qquad c^2 = OH.OS,$$

d'où l'on conclut [18]

$$r^2 = b^2 \frac{HS}{OS};$$

mais, dans le triangle rectangle HLS, on a aussi

$$r^2 = HK.HS;$$

de la comparaison de ces deux expressions de r^2, résulte

$$HK.OS = b^2.$$

La *figure 8* suppose que la conique est une ellipse; pour l'adapter au cas de l'hyperbole, il suffirait d'y remplacer la lettre S par la lettre H, et réciproquement, ce qui laisse subsister la démonstration.

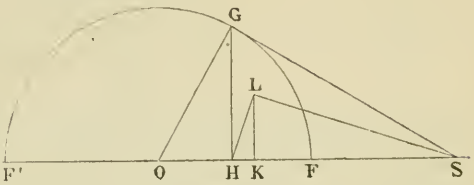


Fig. 8.

22. — Les propriétés des trois paragraphes précédents se trouvent résumées par les relations

$$\frac{a^2}{k} = \frac{b^2}{\delta} = \frac{c^2}{h} = s,$$

dans lesquelles h, k, s représentent les distances du centre de la conique au centre du cercle bitangent, à la corde des contacts et au saillant, d la distance du centre du cercle à la corde des contacts.

Pour la parabole, ces propriétés sont remplacées par les suivantes :

Le centre d'un cercle bitangent et le saillant sont équidistants du foyer.

Le milieu de la corde des contacts et le saillant sont équidistants du sommet.

La distance du centre a la corde des contacts est égale au paramètre.

23. — *La demi-longueur de la corde des contacts est dans le rapport de* b *à* a *avec la moyenne proportionnelle entre les distances du milieu de cette corde aux sommets de l'axe focal.*

Les lettres O, H, K, L, S *(fig. 9* et *10)* conservant encore leurs significations, soient A, A′ les deux sommets.

La droite KL est la polaire de S par rapport à la circonférence décrite sur AA′ comme diamètre [20]. Si donc, dans

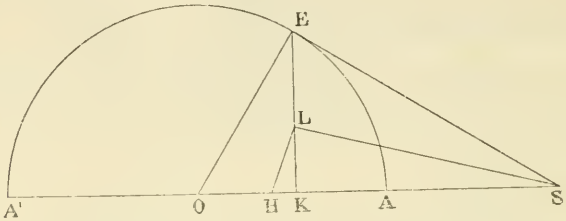


Fig. 9.

le cas de l'ellipse *(fig. 9)*, on mène SE tangente à cette circonférence, le point de contact E se trouvera sur le prolongement de KL; et si, dans le cas de l'hyperbole *(fig. 10)*, on mène la tangente par le point K, le point de contact devra se

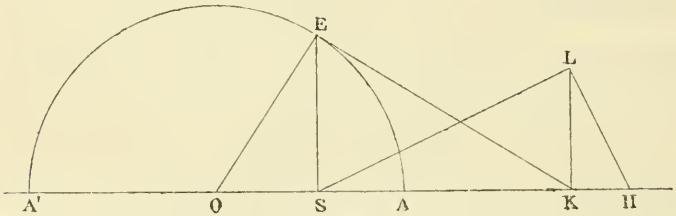


Fig. 10.

trouver sur la perpendiculaire SE à AA′. Le triangle rectangle HLS donne

$$\overline{KL}^2 = HK.KS;$$

mais, par le triangle OES, dans le premier cas, ou, dans le second, par le triangle OEK, on a

$$\overline{KE}^2 = OK.KS;$$

il vient donc

$$\frac{\overline{KL}^2}{\overline{KE}^2} = \frac{HK}{OK} = \frac{b^2}{a^2} \text{ [22]};$$

or KE est moyenne proportionnelle entre KA et KA′.

Dans la parabole, la demi-corde des contacts est moyenne proportionnelle entre la distance du sommet à la corde et le double du paramètre.

24. — *La distance mutuelle de la droite des contacts et de la polaire d'un foyer par rapport au cercle bitangent est la même quel que soit ce cercle.*

Sans faire de figure, mais les lettres O, F, F′, H et K étant prises dans la même acception que précédemment, appelons Z le point où la polaire de F par rapport au cercle rencontre l'axe. On aura $HF.HZ = r^2$,

d'où [18] $$HZ = \frac{b^2}{c^2} HF';$$

mais on a aussi [22] $$HK = \frac{b^2}{c^2} OH;$$

il vient donc

$$\frac{b^2}{c^2} = \frac{HZ}{HF'} = \frac{HK}{OH} = \frac{HZ - HK}{HF' - OH} = \frac{KZ}{c},$$

d'où $$KZ = \frac{b^2}{c}.$$

Nous avons supposé F et H d'un même côté du centre de la conique; s'ils étaient de côtés différents, on arriverait au même résultat en ajoutant les deux rapports terme à terme au lieu de les retrancher.

Dans la parabole, HZ est double du paramètre, HK est égal au paramètre, donc KZ est aussi égal au paramètre.

25. — *Les droites des contacts d'une conique avec un cercle bitangent et avec deux tangentes se coupent en l'un des nœuds, par rapport à leur axe radical, des circonférences qui ont pour diamètres les cordes interceptées par le cercle et par le système des deux tangentes sur la polaire, par rapport au cercle, du point d'intersection de ces deux tangentes.*

Soient T *(fig. 11)* ce dernier point, CD et UV les deux cordes, Ω et Ω′ les deux nœuds; ils formeront avec C, D et aussi avec U, V deux divisions harmoniques, de sorte que TΩ′ sera la polaire de Ω, et TΩ celle de Ω′, par rapport au cercle et aussi par rapport aux tangentes TU, TV.

Il en sera de même par rapport à la conique pour l'un de ces deux groupes de droite et de point, c'est-à-dire que si TΩ′ n'est pas la polaire de Ω par rapport à la conique, TΩ sera celle de Ω′. En effet, appelons Π, Π′ ces deux polaires,

Θ et Λ les droites des contacts de la conique avec le cercle et avec le système TU, TV. Puisque TΩ′ est la polaire de Ω par rapport au cercle, elle rencontrera Θ au même point que Π [4]; Λ passera aussi par ce point (démonstration identique à celle du § 4, dans laquelle le cercle peut être remplacé par deux droites ou par une conique quelconque). De même, si Π′ ne se confondait pas avec TΩ, le point d'intersection de Θ et Λ devrait coïncider avec celui de Π′ et TΩ, et les droites Θ, Λ, Π, Π′, TΩ, TΩ′ devraient concourir en T, ce qui est impossible. Donc la polaire de Ω′, par rapport à la conique, est bien TΩ. Les droites qui doivent concourir sont maintenant Θ, Λ, Π et TΩ′; mais Π, polaire de Ω, doit passer par le pôle de TΩ, c'est-à-dire par Ω′; le point de concours sera donc Ω′.

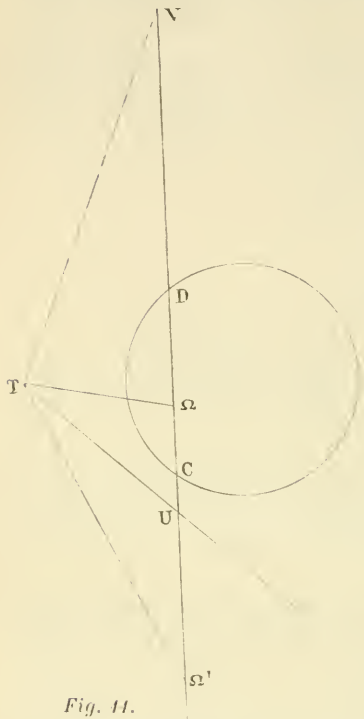


Fig. 11.

26. — *Pour tous les points de la conique situés entre les droites des contacts de deux cercles bitangents, la somme des tangentes menées à ces deux cercles est la même; pour les autres, c'est la différence. Le rapport de la somme ou de la différence constante à la distance mutuelle des deux droites des contacts est égal à l'excentricité.*

C'est là une conséquence immédiate de la propriété du § 14.

27. — *L'axe radical de deux cercles bitangents est équidistant des deux droites des contacts.*

Le plus souvent, cet axe radical coupe la conique; alors, pour établir la proposition énoncée, il suffit d'appliquer à l'un des points d'intersection, et successivement aux deux cercles, la propriété du § 14. Mais, s'il s'agissait de cercles bitangents à deux branches différentes de la même hyperbole, la démonstration pourrait se trouver en défaut, tandis que la suivante convient à tous les cas.

Menons aux deux cercles une tangente commune; soient C, C′ *(fig. 12)* les points où elle les touche M, M′ ceux où elle rencontre la conique, et U, U′ ses intersections avec les droites des contacts; abaissons, sur ces dernières, du milieu I de MM′, la perpendiculaire PP′.

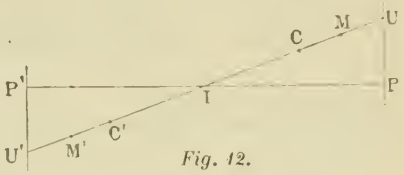


Fig. 12.

Les rapports de IM à IP et à IP′ étant tous deux égaux à l'excentricité [17], on a IP′ = IP, d'où résulte IU′ = IU; mais, chacune des deux divisions U, M, C, M′ et U′, M′, C′ M étant harmonique [6], on a aussi

$$IC'.IU' = \overline{IM}^2 = IC.IU;$$

l'égalité de IU′ à IU entraîne donc celle de IC′ à IC, et l'axe radical des deux cercles passe par I. *(A suivre.)*

NOTICE HISTORIQUE

SUR LA GÉOMÉTRIE DE LA MESURE

Par M. **Aubry.**

(*Suite*, voir page 248.)

XV. — *La surface latérale du cône est égale à celle d'un cercle dont le rayon est moyen proportionnel entre le rayon et le côté du cône.*

Démonstration identique à la précédente.

XIX, XX, XXI. — Volumes des solides de révolution produits par un triangle tournant autour d'une droite de son plan passant par un sommet.

XXII. — *Soit un polygone d'un nombre pair de côtés* (fig. 9), *joignons les sommets perpendiculairement à un même diamètre : la somme des cordes ainsi obtenues est au diamètre comme la corde* ΓE *à* AE. (Voir *J. E.*, 1895, p. 107.)

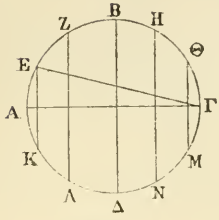


Fig. 9.

Dans ce qui suit, nous désignerons par Π le polygone dont il vient d'être question, par P le solide que produit Π en tournant autour du diamètre AΓ, par S et *s* les sphères circonscrites à P.

XXV. — *La surface de* P *est égale à celle du cercle* A *dont le rayon est moyen proportionnel entre* AΓ *et* ΓE. Conséquence de (XXII).

XXVI, XXXI. — *La surface de* P *est comprise entre quatre grands cercles de* S *et quatre grands cercles de* s. En effet, le rayon du cercle A (XXV) est compris entre AΓ et ΓE, diamètres de S et de *s*.

XXVII. — *Le volume de* P *est égal à celui d'un cône dont la base égale* Π *et la hauteur égale le rayon de la sphère inscrite.* Il ajoute les solides produits par la révolution des triangles EΣA, ZΣE, BΣZ, etc., en appliquant (XIX), (XX) et (XXI).

XXVIII, XXXIII. — *Le volume de* P *est compris : 1° entre quatre fois le cône ayant un grand cercle de* S *pour base et son rayon pour hauteur, et 2° entre quatre fois le cône ayant pour base et pour rayon, un grand cercle et le rayon de* s. Conséquence de (XXVII).

XXIX. — *La surface de* s *est comprise entre celle de* P *et celle du solide* p *inscrit et semblable à* P. Conséquence de (E).

XXXV. — *La surface de la sphère est équivalente à quatre fois celle d'un grand cercle.* Supposons la surface de *s* plus grande que le cercle A dont le diamètre égale le rayon de *s*. On peut poser, d'après (III),

$$\frac{\text{Surf. } s}{\text{A}} > \frac{\text{B}}{\Gamma}.$$

Dans s, inscrivons un solide p semblable à P : les deux polygones générateurs Π, π, peuvent être supposés tels qu'on ait (IV)

$$(\alpha) \qquad \frac{\text{côté } \Pi}{\text{côté } \pi} < \frac{B}{\Delta},$$

Δ étant égal à $\sqrt{B\Gamma}$. Or, on a

$$\frac{\text{surf. P}}{\text{surf. } p} = \frac{\Pi}{\pi} < \frac{B^2}{\Delta^2} = \frac{B}{\Gamma} < \frac{\text{surf. } s}{A}.$$

La relation $\frac{\Pi}{\pi} < \frac{B}{\Gamma}$ est absurde, puisque surf. P $> s$ et surf. $p <$ A.

Supposons surf. $s <$ A, et posons (α) comme tout à l'heure et en outre

$$\frac{A}{\text{surf. } s} > \frac{B}{\Gamma}.$$

On aura

$$\frac{\text{surf. P}}{\text{surf. } p} = \frac{\Pi}{\pi} < \frac{B^2}{\Delta^2} = \frac{B}{\Gamma} < \frac{A}{\text{surf. } s},$$

résultat impossible à admettre, puisque surf. P $>$ A (XXXI) surf. $p <$ surf. s.

XXXVI. — *La sphère vaut quatre fois le cône* Ξ, *dont la hauteur égale le rayon et la base un de ses grands cercles.* Soit $s > \Xi$ et posons

$$\frac{1}{\Xi} > \frac{K}{H}.$$

Insérons deux moyens arithmétiques, I, Θ, entre K et H, et posons

$$\frac{\text{côté } \Pi}{\text{côté } \pi} < \frac{K}{I},$$

on aura (*)

$$\frac{P}{p} = \frac{K^3}{I^3} < \frac{K}{H} < \frac{s}{\Xi},$$

relation impossible, puisque P $> s$ et $p < \Xi$ (XXVIII.)

(*) Archimède renvoie, pour la démonstration de l'inégalité $\frac{K^3}{I^3} < \frac{K}{H}$, à des lemmes qui ne sont pas parvenus jusqu'à nous. On peut y suppléer ainsi : K, I Θ, H étant en progression arithmétique décroissante, on a

$$\frac{K}{I} = \frac{K}{I}, \quad \frac{K}{I} < \frac{I}{\Theta}, \quad \frac{K}{I} < \frac{\Theta}{H},$$

d'où, en multipliant membre à membre, l'inégalité en question.

L'inégalité d'Archimède revient à $(1 + x)^3 > 1 + 3x$. On peut donc attribuer son nom à l'importante relation $(1 + x)^n > 1 + nx$.

Soit $s < \Xi$ et posons $\frac{K}{H} < \frac{\Xi}{s}$ et le reste comme tout à l'heure. On a $\frac{P}{p} = \frac{K^3}{I^3} < \frac{K}{H} < \frac{\Xi}{s}$,
conclusion fausse, puisque $p < s$ et $P > \Xi$ (XXXIII).

XXXVII. — *La surface d'une sphère vaut les deux tiers de celle du cylindre circonscrit, et son volume également les deux tiers de celui du même cylindre.* Cette relation parut si belle à Archimède, tant pour elle-même que par la manière dont il l'avait trouvée, qu'il ordonna que la figure d'une sphère dans un cylindre fût gravée sur son tombeau, circonstance qui permit à Cicéron, cent cinquante plus tard, de le retrouver.

Archimède donne ensuite des théorèmes analogues relatifs aux portions de la sphère.

Il a encore appliqué la même méthode à la mesure du cercle, de l'ellipse et de la parabole. Voici sa démonstration pour le cercle.

Un cercle N *est égal à un triangle rectangle* E *dont les côtés sont égaux respectivement à la circonférence et au rayon de* N *(fig. 10).* Supposons d'abord le cercle plus grand que E; inscrivons des polygones réguliers de quatre, huit, seize... côtés, jusqu'à ce que l'excès du cercle sur le polygone soit plus petit que celui du cercle sur E : le polygone est plus grand que E, conclusion inadmissible, puisque le périmètre et l'apothème du premier sont respectivement plus petits que les côtés du second.

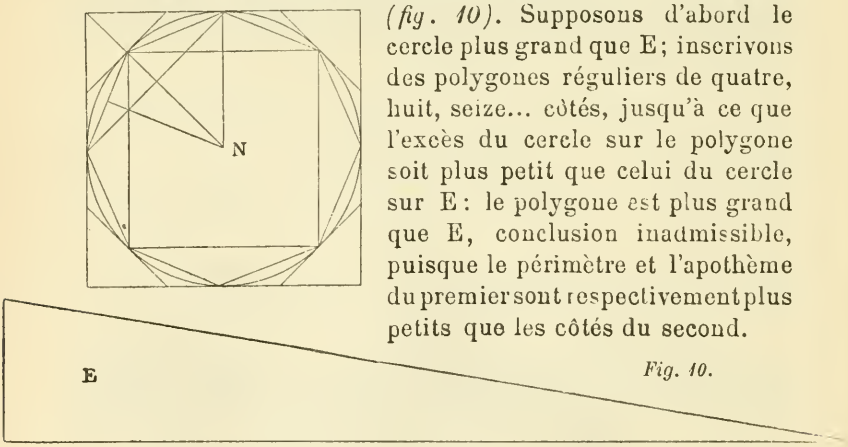


Fig. 10.

Supposons N < E; circonscrivons des polygones réguliers de quatre, huit, seize... côtés jusqu'à ce que l'excès du polygone sur le cercle N soit plus petit que celui de E sur N.

On en conclura que le polygone est plus petit que E, ce qui est absurde, puisque l'apothème du polygone étant égal au petit côté de E, le périmètre est plus grand que le grand côté.

Voici maintenant pour l'ellipse. *L'ellipse* BΔ (fig. 11) *est au cercle* EΔ *comme* BΔ *à* AΔ. En effet écrivons

$$\frac{\text{cercle } \Psi}{\text{cercle } A\Gamma} = \frac{B\Delta}{A\Delta}$$

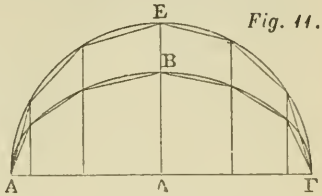


Fig. 11.

et supposons d'abord $\Psi >$ ell. Inscrivons dans le cercle et dans l'ellipse deux polygones ayant un nombre pair de côtés et tels que le polygone semblable inscrit dans Ψ soit plus grand que l'ellipse. On aurait

$$\frac{\text{pol. } B\Delta}{\text{pol. } E\Delta} = \frac{B\Delta}{E\Delta} = \frac{\text{pol. } \Psi}{\text{pol. } E\Delta},$$

ce qui donnerait l'égalité pol. Ψ = pol. BΔ contraire à l'hypothèse.

Supposons $\Psi <$ ell. On inscrira dans l'ellipse un polygone $> \Psi$ et on en tirera de même cette conclusion absurde que le polygone semblable inscrit à Ψ serait égal au polygone BΔ.

Archimède a quarré le parabole de deux manières différentes ; la seconde ayant plus de rapport avec les méthodes précédentes, nous allons la présenter d'abord.

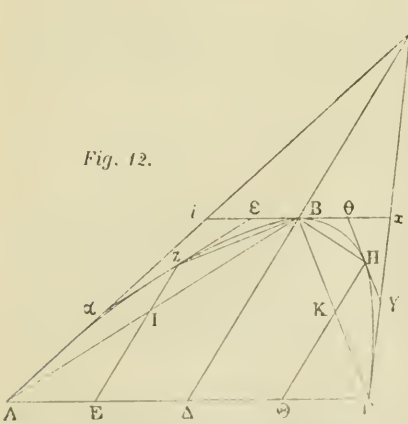


Fig. 12.

Soit le segment parabolique ABΓ *(fig. 12)* dont ΔB est le diamètre. Par les milieux de AΔ, ΔΓ, on mène des parallèles à ΔB, lesquelles déterminent deux triangles AZB, BHΓ, qui ensemble sont égaux au quart du triangle ABΓ ; par les milieux de AE, EΔ,...

on mènera d'autres parallèles, qui formeront d'autres triangles égaux ensemble au quart de la somme des deux premiers, et ainsi de suite.

Soit K *une surface égale aux quatre tiers du triangle* ΑΒΓ : *le segment parabolique est égal à* K. En effet, supposons le triangle plus grand que K. Inscrivons des triangles comme il a été dit jusqu'à ce que l'excès du segment sur le polygone soit plus petit que celui du segment sur K. Or, la somme d'une suite de termes dont chacun est le quart du précédent est plus petite que les quatre tiers du plus grand (*J. E.* 1894, p. 50). Il y a donc contradiction.

On démontre par le même moyen que le segment ne peut être plus petit que K (*).

Voici la première démonstration qui se rattache à la deuxième méthode d'Archimède, et qui a été probablement l'acheminement à celle-ci.

Soit le segment ΒΓ *(fig. 13)*. Menons les diamètres équidistants ΒΔ, ΜΦ, ΝΨ, ΕΤ, ΗΣ, et la tangente ΑΓ : il fait voir que les longueurs ΒΕ, ΕΗ, ΗΙ, ΙΚ, ΚΔ sont égales, et que le triangle ΒΔΓ est plus petit que trois fois la somme des trapèzes ou triangles ΒΖ, ΜΡ, ΝΘ, ΞΟ, ΗΣΓ, et plus grand que trois fois la somme des trapèzes ou triangles ΖΝ, ΞΡ, ΘΠ, ΓΟΗ.

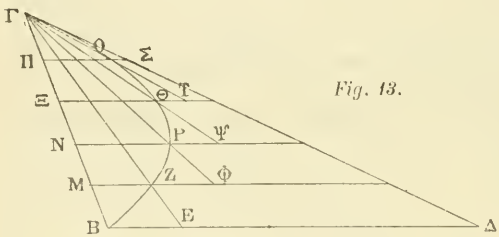


Fig. 13.

Admettons que le segment soit plus grand que le tiers Z du triangle ΒΔΓ; supposons que le triangle ΒΓΕ soit plus petit que l'excès du segment sur Z : Z et le triangle ΒΓΕ sont ensemble plus petits que le segment. Or, la somme des trapèzes ou triangles ΜΕ, ΦΑ, ΘΡ, ΘΟ, ΓΟΣ est égale au

(*) On peut aussi, comme Torricelli et G. de Saint-Vincent, considérer le triangle circonscrit ΑδΓ et en retrancher successivement le triangle *ιδx*, qui en est le quart, les triangles *αιε*, *θxγ*, qui sont chacun le quart du triangle *ιδx*, et ainsi de suite.

triangle BΓE, donc Z est plus petit que la somme des trapèzes ou triangles MΛ, ΞP, ΠΘ, ΠOΓ, conclusion contraire à ce qui a d'abord été établi : la supposition est donc fausse. L'impossibilité de la supposition contraire se démontre de même. *(A suivre.)*

BACCALAURÉATS

(Session d'avril 1896.)

Académie de Lyon.

Questions au choix :

1° Progressions géométriques;

2° Fractions décimales périodiques;

3° Étant donnée une fractiou périodique mixte, retrouver la fraction ordinaire qui lui a donné naissance.

Problème. — On donne l'angle O et le côté AO; du point A on abaisse sur OB une perpendiculaire AB, puis une perpendiculaire BB′ sur OA, et ainsi de suite. On demande la limite de la somme de ces perpendiculaires AB, BB′, B′B″, B″B‴, etc.

Angle O = 37° 40′ 42″; OA = 28 m. 75.

Académie de Montpellier.

Calculer les côtés et les angles d'un triangle, sachant que les côtés sont en progression arithmétique, et connaissant l'angle opposé au côté moyen, et la surface du triangle. — Discuter le problème.

Académie de Nancy.

Questions au choix :

1° Connaissant le volume du parallélépipède rectangle, trouver celui d'un parallélépipède quelconque.

2° Connaissant le volume du tronc de pyramide triangulaire, trouver celui d'un tronc de pyramide quelconque;

3° Trouver le volume engendré par un segment circulaire tournant autour d'un diamètre extérieur à sa surface, connaissant la corde du segment et la projection de cette corde sur l'axe.

Problème. — On considère un segment circulaire ACB, appartenant à un cercle de rayon donné R : calculer la corde AB de ce segment, sachant que la somme AB + n. CD est égale à 2R, n désignant un nombre donné quelconque, et CD étant la distance du milieu C de l'arc à la corde. Indiquer le nombre des solutions, suivant la valeur attribuée à n. Interpréter les solutions négatives.

Académie de Poitiers.

Questions au choix :

1° Réduction à deux forces d'un système de forces appliquées à un corps solide;

2° Composition d'un système de forces parallèles. Centre de ces forces. Centre de gravité;

3° Composition et décomposition des couples.

Problème. — Étudier les variations de la fonction :

$$y = \frac{2x^2 - x - 3}{x^2 + 1}.$$

Académie de Rennes.

Questions au choix :

1° Établir les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un polynôme entier, rationnel par rapport à x, soit divisible par $x - a$;

2° Trouver la somme et la somme des carrés des termes d'une progression arithmétique. Application aux n premiers nombres impairs.

3° Maximum d'un produit de facteurs positifs dont la somme a est constante. Cas où ces facteurs sont affectés d'exposants entiers ou positifs.

Problème. — On donne une circonférence de rayon R et le diamètre AB; par le centre O, mener un rayon OM, tel que le volume engendré par le secteur circulaire MOA égale m fois le volume engendré par le triangle OMB.

Académie de Toulouse.

Premier problème. — A et B sont deux points situés sur un même diamètre d'un cercle O. On mène par A une corde PQ dont on joint les extrémités P et Q au point B. Étudier les variations de l'aire du triangle BPQ quand la corde PQ tourne autour du point A. (Le point A est intérieur au cercle.)

Deuxième problème. — Calculer, à un millimètre près, le côté d'un polygone régulier convexe de douze côtés dont la surface est égale à 27 mètres carrés 3 décimètres carrés.

QUESTION 681

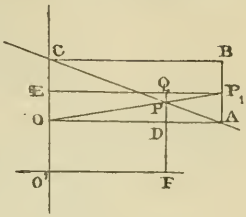
Solution par M. Ernest Foucart.

Par le sommet O, *d'un rectangle* OABC, *on mène une droite variable* Δ *qui coupe la diagonale* AC *en* P *et le côté* AB *en* P_1.

Le lieu du point Q, *intersection des parallèles à* AB *et* BC *menées respectivement par* P *et* P_1, *est une hyperbole.*

(Davidoglou.)

Prolongeons CO d'une longueur $OO' = CO$; PQ rencontre en F la parallèle à OA menée par et en D la droite $OA.O'$ Soit $OA = a$ $OC = AB = b$.



$$\frac{a - QE}{QE} = \frac{DA}{OD} = \frac{PA}{PC} = \frac{P_1A}{CO}$$
$$= \frac{QF - b}{b},$$

d'où $QE.QF = ab$.

Le lieu de Q est une hyperbole équilatère admettant O'C, O'F pour asymptotes.

Nota. — Solutions diverses par MM. Droz-Farny, Goyens, L'Huillier.

QUESTION 684

Solution par M. Plakhowo.

Si $\alpha = 10°$, *on a*

$$\cot g\,\alpha.\cot g\,3\alpha.\cot g\,5\alpha.\cot g\,7\alpha = tg\,2\alpha.tg\,4\alpha.tg\,6\alpha.tg\,8\alpha.$$

(Jorge-F. d'Avillez.)

Si $\alpha = 10°$, alors $tg\,8\alpha = \cot g\,\alpha$, les angles étant complémentaires; $tg\,6\alpha = \cot g\,3\alpha$ pour la même raison; $tg\,4\alpha = \cot g\,5\alpha$, $tg\,2\alpha = \cot g\,7\alpha$. Multiplions ces égalités membre à membre, et nous aurons l'égalité demandée.

Autrement. — Voici la solution de M. Jorge d'Avillez, qui prend pour bases des égalités utiles à connaître et conduisant à des exercices intéressants.

D'après une remarque de Lindmann (*), on a

$$(1)\quad \begin{cases} \sin 20°.\sin 40°.\sin 60°.\sin 80° = \dfrac{3}{16}, \\ \cos 20°.\cos 40°.\cos 60°.\cos 80° = \dfrac{1}{16}. \end{cases}$$

(*) Voir Lindmann : *Nouvelles Annales de Mathématiques*, question 813, et aussi Driant, même journal, pages 383, 471 (année 1867).

Nous aurons donc, en supposant $\alpha = 10^\circ$,

$$\cos\alpha.\cos 3\alpha.\cos 5\alpha.\cos 7\alpha = \frac{3}{16},$$

$$3\sin\alpha.\sin 3\alpha.\sin 5\alpha.\sin 7\alpha = \frac{3}{16};$$

d'où l'on voit que

(1) $$\operatorname{cotg}\alpha.\operatorname{cotg} 3\alpha.\operatorname{cotg} 5\alpha.\operatorname{cotg} 7\alpha = 3.$$

Les égalités (1) donnent

$$16\sin 2\alpha.\sin 4\alpha.\sin 6\alpha.\sin 8\alpha = 3,$$

et $$48\cos 2\alpha.\cos 4\alpha.\cos 6\alpha.\cos 8\alpha = 3;$$

et, par suite,

(2) $$\operatorname{tg} 2\alpha.\operatorname{tg} 4\alpha.\operatorname{tg} 6\alpha.\operatorname{tg} 8\alpha = 3.$$

La comparaison des égalités (1), (2) conduit à l'égalité proposée.

Nota. — M. Angel Bozal Obejero, professeur à l'Institut de Bilbao, nous a adressé une solution analogue à celle de M. Plakhowo.

QUESTION 686

Solution par M. A. Droz-Farny.

Les perpendiculaires élevées en α, β, γ, *sur les côtés du triangle* $\alpha\beta\gamma$, *triangle orthique de* ABC, *interceptent sur les côtés* BC, CA, AB *des segments* x, y, z, *tels que*

$$\frac{a-x}{a+x} + \frac{b-y}{b+y} + \frac{c-z}{c+z} = 1. \qquad \text{(Davidoglou.)}$$

Les perpendiculaires élevées en β et γ sur le côté $\beta\gamma$ rencontrent BC en β' et γ' de manière que $x = \beta'\gamma'$.

Le côté $\beta\gamma$ forme avec BC un angle égal à $B - C$, donc $\beta\gamma = x\cos(B - C)$. Le triangle $A\beta\gamma$ est semblable à ABC, le rapport de similitude étant $\cos A$; donc $\beta\gamma = a\cos A$ et par conséquent $x = -\dfrac{a\cos(B+C)}{\cos(B-C)}$.

$$\sum\frac{a-x}{a+x} = \sum\frac{\cos(B-C)+\cos(B+C)}{\cos(B-C)-\cos(B+C)} = \sum\operatorname{cotg}B.\operatorname{cotg}C = 1.$$

QUESTION 688

Solution par M. Goyens.

Démontrer que si l'on a :

(1) $$tg^2\alpha \, cotg\,\beta = 1.$$

(2) $$tg\,(\beta - \alpha) = \frac{a}{b},$$

(3) $$\frac{tg\,(\alpha - 45^\circ)}{tg\,\alpha + cotg\,\alpha} = \frac{a}{c},$$

on a aussi $$\frac{a^2 + (b-c)^2}{a^2 - (b-c)^2} = \frac{c}{2\,(b-c)}.$$

Ces égalités peuvent s'écrire :

(4) $$\mathrm{tg}^2\,\alpha = \mathrm{tg}\,\beta.$$

(5) $$\frac{\mathrm{tg}\,\beta - \mathrm{tg}\,\alpha}{1 + \mathrm{tg}\,\beta\,\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{a}{b}.$$

(6) $$\frac{(\mathrm{tg}\,\alpha - 1)\,\mathrm{tg}\,\alpha}{(\mathrm{tg}\,\alpha + 1)(\mathrm{tg}^2\,\alpha + 1)} = \frac{a}{c}.$$

Remplaçant dans (5) tg β par $\mathrm{tg}^2\,\alpha$, il vient :

(7) $$\frac{\mathrm{tg}^2\,\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha}{1 + \mathrm{tg}^3\,\alpha} = \frac{a}{b}.$$

(8) $$\frac{(\mathrm{tg}\,\alpha - 1)\,\mathrm{tg}\,\alpha}{(\mathrm{tg}\,\alpha + 1)(\mathrm{tg}^2\,\alpha + 1)} = \frac{a}{c},$$

ou encore :

(9) $$-a\,\mathrm{tg}^3\,\alpha + b\,\mathrm{tg}^2\,\alpha - b\,\mathrm{tg}\,\alpha - a = 0.$$

(10) $$-a\,\mathrm{tg}^3\,\alpha - (a-c)\,\mathrm{tg}^2\,\alpha - (a+c)\,\mathrm{tg}\,\alpha - a = 0.$$

Soustrayant membre à membre (10) de (9), on trouve :

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{b-c-a}{b-c+a}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{\mathrm{tg}\,\alpha - 1}{\mathrm{tg}\,\alpha + 1} = \frac{a}{c-b}$$

et par suite

(11) $$\frac{\mathrm{tg}^2\,\alpha + 1}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha} = \frac{a^2 + (b-c)^2}{(b-c)^2 - a^2}.$$

D'ailleurs (7) et (8) donnent par division :

$$\frac{\mathrm{tg}^2\,\alpha + 1}{\mathrm{tg}^2\,\alpha - \mathrm{tg}\,\alpha + 1} = \frac{c}{b},$$

d'où

$$(12) \qquad \frac{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{c}{c - b}.$$

Comparant (11), (12), on a le résultat demandé.

Nota. — Solution analogue par M. Barisien.

QUESTION 689

Solution par M. A. Droz-Farny.

On donne une sphère, une de ses cordes et un point arbitraire O *sur cette corde. Par* ab, *on mène un plan quelconque qui coupe la sphère suivant le petit cercle* C.

Démontrer qu'on peut inscrire dans C *une infinité de triangles qui soient en même temps circonscrits à un cercle de centre* O. *Si* l, m, n *sont les côtés d'un de ces triangles, faire voir que* $\frac{1}{lm} + \frac{1}{ln} + \frac{1}{mn}$ *est constant, quel que soit le triangle et quel que soit le plan mené par* ab. (Mannheim.)

Menons par *ab* et dans un plan quelconque une circonférence de rayon R. Le point O étant situé entre *a* et *b*, décrivons de O comme centre une circonférence de rayon *r* calculé par la relation d'Euler $\overline{CO}^2 = R^2 - 2Rr$. Il existera une infinité de triangles inscrits dans C et circonscrits à O.

On a

$$\sum \frac{1}{lm} = \frac{l+m+n}{lmn} = \frac{\frac{2S}{r}}{4RS} = \frac{1}{2Rr} = \frac{1}{R^2 - \overline{CO}^2} = \frac{1}{Oa.Ob} = \text{const.}$$

Le théorème de M. Mannheim est valable pour un cercle quelconque passant par *ab*.

QUESTION 690

Solution par M. A. Droz-Farny.

Étant donné un triangle ABC, *on inscrit dans l'angle* A *les deux cercles qui sont tangents à la fois aux côtés de l'angle et au cercle inscrit du triangle* ABC; *on inscrit de même les deux cercles qui sont tangents à la fois aux côtés de l'angle et au cercle ex-inscrit dans l'angle* A. *En agissant ainsi pour les angles* B *et* C, *on trace douze cercles dont le produit des rayons est égal à la quatrième puissance du produit du rayon du cercle inscrit multiplié par l'aire du triangle* ABC.

(E.-N. Barisien.)

Soient ρ', ρ'' les rayons, I', I'' les centres des deux cercles tangents à la fois aux côtés de l'angle A et au cercle inscrit dans le triangle ABC. On a

$$r : \rho' = AI : AI';$$

de là,
$$\frac{r-\rho'}{r} = \frac{r+\rho'}{AI} = \frac{(r+\rho')}{r}\sin\frac{A}{2},$$

d'où
$$\rho' = \frac{r\left(1-\sin\frac{A}{2}\right)}{1+\sin\frac{A}{2}};$$

de même
$$\rho'' = \frac{r\left(1+\sin\frac{A}{2}\right)}{1-\sin\frac{A}{2}}; \quad \text{donc} \quad \rho'\rho'' = r^2.$$

On trouverait de même pour les deux cercles tangents au cercle ex-inscrit dans l'angle A : $\rho_1\rho_2 = r_1^2$.

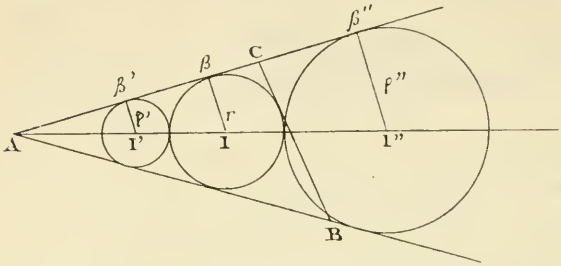
On a donc, pour le produit total,

$$\pi = r^6 r_1^2 r_2^2 r_3^2 = r^4 . r^2 r_1^2 r_2^2 r_3^2.$$

Or,
$$r r_1 r_2 r_3 = S^2,$$

et par conséquent
$$\pi = r^4 S^4 = (rS)^4.$$

Autrement. — On voit immédiatement que les cercles (I′) et (I″) sont inverses par rapport au point A, la puissance d'inversion étant égale à la puissance de A par rapport au cercle inscrit (I). On en conclut $\overline{A\beta}^2 = A\beta'.A\beta''$.



On a $$\rho' = \frac{r}{A\beta} A\beta', \qquad \rho'' = \frac{r}{A\beta} A\beta'',$$
d'où $$\rho'\rho'' = r^2.$$

On aurait pour les cercles correspondants au cercle ex-inscrit dans l'angle A
$$\rho_1'\rho_1'' = r_A^2.$$

Par suite, le produit des douze rayons est égal à
$$r^6 r_A^2 r_B^2 r_C^2 = r^4(rr_A r_B r_C)^2 = (rS)^4.$$

Nota. — Autre solution par M. E. Foucart.

QUESTION 691

Solution par M. H. L'Huillier.

Par le point I, *centre du cercle inscrit dans un triangle* ABC, *on mène une droite parallèle à* BC, *qui rencontre* AC *en* B″ *et* AB *en* C′; *par le même point* I, *on mène une parallèle à* AC *qui rencontre* BC *en* A′ *et* AB *en* C″, *puis une parallèle à* AB *qui rencontre* BC *en* A″, *et* AC *en* B′.

1° *Démontrer les relations*
$$\frac{IA'.IA''}{BC} = \frac{IB'.IB''}{AC} = \frac{IC'.IC''}{AB}$$
$$IA.IB'.IC' = A'A''.B'B''.C'C''.$$

2° *Évaluer l'aire du triangle formé par les droites* A′B″, A″C′ B′C″. *Dans quel cas cette aire est-elle égale à celle du triangle* ABC?

3° *On considère le cercle de rayon* r_1 *tangent en* B′ *et* C″ *aux côtés* AC *et* AB, *le cercle de rayon* r_2 *tangent en* C′ *et* A″ *aux côtés* AB *et* BC, *et le cercle de rayon* r_3 *tangent en* A′ *et* B″ *aux côtés* BC *et* AC. *Démontrer la relation*

$$\frac{r_1 r_2 r_3}{r^3} = \frac{2R^2}{p^2},$$

R, r *et* p *désignant, respectivement, les rayons du cercle circonscrit et du cercle inscrit, et le demi-périmètre.* (E.-N. Barisien.)

Calculons A′A″. On a $A'A'' = \frac{r}{h_a} a$, d'ailleurs $2pr = h_a a$, donc $A'A'' = \frac{a^2}{2p}$.

1° Les triangles semblables IA′A″ et ABC donnent

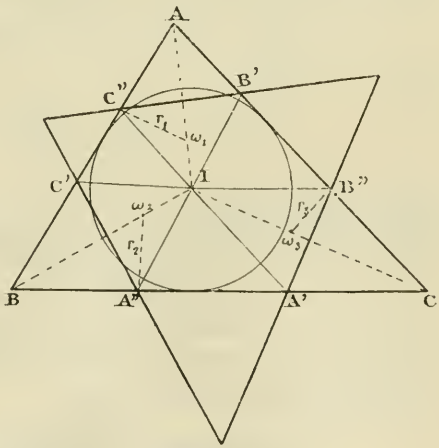
$$\frac{IA'}{b} = \frac{IA''}{c} = \frac{A'A''}{a} = \frac{a}{2p}, \quad \text{d'où} \quad \frac{IA'.IA''}{a} = \frac{abc}{2p}.$$

On aurait de même $\frac{IB'.IB''}{b} = \frac{IC'.IC''}{c} = \frac{abc}{2p}$.

On a $IA' = \frac{b}{a} A'A''$, $IB' = \frac{c}{b} B'B''$, $IC' = \frac{a}{c} c'c''$;

par suite $IA'.IB'.IC' = A'A''.B'B''.C'C''$.

2° Les figures IA′CB″, IB′AC″, IC′BA″ sont des losanges, donc les droites A′B″, B′C″, C′A″, sont parallèles aux bissectrices extérieures du triangle ABC. Le triangle formé par ces bissectrices est homothétique au triangle des trois droites, le rapport d'homothétie étant égal à 2. Or,



la surface du triangle des bissectrices est égale à

$$s + \frac{1}{2} ar_a + \frac{1}{2} br_b + \frac{1}{2} cr_c,$$

s étant l'aire de ABC, r_a, r_b, r_c, les rayons des cercles ex-inscrits. On a d'ailleurs

$$s = (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c$$

et la surface du triangle considéré est égale à

$$\frac{s}{4}\left[1 + \frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c}\right].$$

Pour qu'elle soit égale à la surface s, il faut que l'on ait

$$\frac{a}{b+c-a} + \frac{b}{c+a-b} + \frac{c}{a+b-c} = 3.$$

Cette expression s'écrit

$$(a+b-c)(a-b)^2 + (b+c-a)(b-c)^2 + (c+a-b)(c-a)^2 = c$$

les coefficients des carrés étant positifs, on doit avoir

$$a = b = c,$$

le triangle est équilatéral.

3° On a $\dfrac{r_1}{r} = \dfrac{IC''}{p-a}$, $\dfrac{r_2}{r} = \dfrac{IA''}{p-b}$, $\dfrac{r_3}{r} = \dfrac{IB''}{p-c}$,

d'où

$$\frac{r_1 r_2 r_3}{r^3} = \frac{IA''.IB''.IC''}{(p-a)(p-b)(p-c)} = \frac{A'A''.B'B''.C'C''}{(p-a)(p-b)(p-c)},$$

remplaçant $A'A''$, $B'B''$, $C'C''$ par leurs valeurs, on a

$$\frac{r_1 r_2 r_3}{r^3} = \frac{a^2b^2c^2}{8p^3(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Mais $\quad s = \dfrac{abc}{4R}$, $s^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$,

d'où $$\frac{r_1 r_2 r_3}{r^3} = \frac{2R^2}{p^2}.$$

Nota. — M. Droz-Farny nous a envoyé une solution trigonométrique, très élégante, de cette question.

QUESTION 692

Solution par M. L'Huillier.

Éliminer φ entre les deux équations

$$(1) \qquad x = \frac{1 + \sin\varphi}{\sin\varphi + \cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi}$$

$$(2) \qquad y = \frac{1 + \cos\varphi}{\sin\varphi + \cos\varphi + \sin\varphi\cos\varphi}. \qquad \text{(G. L.)}$$

Divisant membre à membre, on a

$$\frac{1 + \sin\varphi}{x} = \frac{1 + \cos\varphi}{y} = t.$$

Portant dans l'une des équations données et dans la relation $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, on a les deux équations

$$t^2xy - t - 1 = 0$$

$$t^2(x^2 + y^2) - 2t(x + y) + 1 = 0,$$

dont le résultant est

$$(x^2 + y^2 + xy)^2 + [x^2 + y^2 - 2xy(x + y)]\,[2(x + y) + 1] = 0.$$

Nota. — Une erreur de transcription a été la cause que la question proposée est sans intérêt, se réduisant à un calcul banal. J'avais voulu mettre $2\sin\varphi\cos\varphi$ au dénominateur, au lieu de $\sin\varphi\cos\varphi$.

Ainsi modifiées, les relations proposées donnent immédiatement

$$x\cos\varphi + y\sin\varphi = 1.$$

$$x\cos\varphi - y\sin\varphi = y - x.$$

Ajoutant et retranchant, on a

$$2x\cos\varphi = y - x + 1,$$

Finalement

$$2y\sin\varphi = x - y + 1.$$

$$\left(\frac{y - x + 1}{2x}\right)^2 + \left(\frac{x - y + 1}{2y}\right)^2 = 1.$$

Cette forme donnée au résultant est intéressante; en effet, si l'on veut construire la courbe unicursale correspondant aux équations proposées, on obtient des séparations du plan en régions qui facilitent singulièrement la discussion. *G. L.*

QUESTIONS PROPOSÉES

784. — On considère dans un quadrilatère inscriptible à un cercle, les quatre triangles formés par les côtés du quadrilatère pris 3 à 3. On sait que les orthocentres de ces quatre triangles sont en ligne droite; démontrer que cette droite passe par le point de rencontre des diagonales du quadrilatère.

(E.-N. Barisien.)

785. — Pour quelle valeur de x l'expression

$$\sqrt{2a - x}\,(\sqrt{x} + \sqrt{2a + x})$$

est-elle rationnelle? *(G. L.)*

786. — Calculer le côté du triangle équilatéral dont les sommets sont situés sur les circonférences concentriques ayant pour rayons r_1, r_2, r_3.

(Le problème est possible, si l'on a $r_3 \leqslant r_1 + r_2$.

(Svechnicoff.)

787. — Par le point O, situé sur la base du triangle isoscèle ABC, on mène la sécante DE, qui coupe les côtés AB et BC en des points D et E. Des points D et E on abaisse les perpendiculaires DX et EY sur la base AC.

Démontrer que $\frac{AO}{OX} + \frac{CO}{OY} = 2.$ *(Svechnicoff.)*

788. — Par les sommets A et A′ de l'ellipse Γ, on mène les droites AN et A′N′ perpendiculaires à l'axe focal. Par un point M de Γ on mène la tangente à cette courbe jusqu'à sa rencontre avec les droites AN et A′N′ en des points B et B′. De ces points, on élève des perpendiculaires à la tangente. Soient X et X′ les points d'intersection de ces perpendiculaires avec l'axe focal. Démontrer que $\frac{1}{AX} - \frac{1}{A'X'} = \pm \frac{2}{p}$, si l'on désigne par p le demi-paramètre de l'ellipse.

(Svechnicoff.)

NOTE

Le journal paraîtra désormais le 1er de chaque mois.

En remerciant ici mes correspondants de tout l'intérêt qu'ils ne cessent de porter à cette publication, je les prie de m'envoyer le plus tôt qu'ils le pourront les solutions des questions proposées.

Le Directeur-Gérant,
G. DE LONGCHAMPS.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 21336-11-96.

TABLE DES MATIÈRES PAR ORDRE MÉTHODIQUE

Arithmétique et Algèbre.

Pages.

Note sur l'extraction des racines carrées et cubiques, par M. *Aubry* . . . 10
La multiplication russe, par M. *Goyens*. 37
Méthodes de division en usage à la fin du siècle dernier, etc...; communiquées par M. *Mathieu* . 97
Sur une inégalité, par M. *A. Schiappa Monteiro*. . . . 121
Exercices sur les determinants, par M. *Elgé*, 170, 198, 223. 244

Géométrie.

Étude sur l'involution généralisée, par MM. *Noyer* et *Ch. Michel* . . 7, 25, 54, 73
Un théorème de géométrie élémentaire, par M. *Duporcq*. 12
Volume des segments de sphère, d'ellipsoïde, d'hyperboloïde, par *F. J.* . . 33
Démonstration d'une proposition conduisant à la relation entre les trois côtés d'un triangle et la longueur d'une bissectrice, par M. *Lauvernay* . 36
Sur l'ombre propre des polyèdres, par M. *M. d'Ocagne*. 49
Sur les cercles radicaux, par M. *Juan-J. Duran-Loriga*. 78
Énoncés divers, par M. *Lauvernay* 101
Sur une nouvelle définition des perpendiculaires, par M. *A. Poulain*. 122
Sur un problème de la géométrie de la règle, par M. *Aletrop* 124
Construction du faisceau $ax^2 + 2bxy + cy^2 = 0$, par M. *Raffali*. 126
Sur les triangles équipotentiels, par M. *A. Bozal Obejero* 145
Démonstration d'un théorème élémentaire, par M. *Raffali* 151
Sur les commencements de la géométrie, par M. *Raffali* 152
Sur la question 7, par M. *Bernès*. 158
Note relative à la distance du centre du cercle circonscrit à un triangle, à son centre de gravité, par M. *Barisien*. 169
Sur la polaire d'un point par rapport à une conique, par M. *A. Tissot*. 193
Sur la distance du centre du cercle circonscrit à un triangle à son centre de gravité, par un *Anonyme*. 198
Sur les cercles bitangents aux coniques, par M. *A. Tissot* 217, 241, 265
Sur les puissances d'un triangle, par M. *Jorge d'Avillez*. 225
Exercices sur un triangle remarquable, par M. *Jorge d'Avillez* 246

Trigonométrie.

Sur quelques identités trigonométriques, par M. *Langley* 3

Pages.

Résolution de l'équation $a \sin x + b \cos x = c$ (construction géométrique de ses racines, par M. *Lauvernay* 5

Sur la détermination de l'angle x correspondant à l'équation $a \sin x + b \cos x = c$, par M. *Em. Lemoine* 59

Comparaison des constructions relatives à l'équation $a \sin x + b \cos x = c$, par M. *Bernès*. 84

Théorème de trigonométrie, par M. l'abbé *Gelin* . . . 222

Baccalauréats.

Session d'octobre 1895 (Caen, Clermont, Dijon, Grenoble, Lille) 15

Id. (Lyon, Montpellier). 41

Session de mars 1896 (Paris, Montpellier, Nancy, Toulouse, Rennes, Poitiers) . 110

Id. (Paris). 133

Session de juillet 1895 (Aix, Alger, Clermont) 156

Session de juillet 1896 (Paris). 180

Session de juillet 1895 (Dijon, Grenoble, Lille, Lyon, Montpellier, Nancy, Poitiers). 181

Session de juillet 1896 (Caen, Rennes, Toulouse, Besançon). 205

Id. (Aix, Alger, Besançon, Bordeaux, Caen) . . 232

Session d'avril 1896 (Aix, Alger, Besançon, Bordeaux, Clermont, Dijon, Grenoble, Lille). 253

Session d'octobre 1896 (Paris) 255

Session d'avril 1896 (Lyon, Montpellier, Nancy, Poitiers, Rennes, Toulouse). 277

Concours divers.

La question de mathématiques élémentaires au concours général de 1895, solution par M. *Droz-Farny*. 105

Pages.

Concours de l'école Navale (1896) 155

Mélanges et Correspondance.

Extrait d'une lettre de M. *Lemoine* (relative à la Géométrographie) 13

Exercices divers par M. *Aug. Boutin*. 40, 66, 103, 127, 154, 177, 204, 231

Extrait d'une lettre de M. *Bernès* (sur la question 647). 67

Extrait d'une lettre de M. *d'Ocagne* (sur le question 660). 67

Extrait d'une lettre de M. *Lemoine* (relative à l'article géométrographique de M. *Bernès*) 103

Lettre de M. *Aubry* relative à l'article bibliographique consacré à la Géométrie de MM. Rouché et de Comberousse. 128

Lettre de M. *L. Lévy* (sur la question 393). 160

Notice historique sur la Géométrie de la mesure, par M. *Aubry*. 173, 201, 227, 248, 271

Extrait d'une lettre de M. *Bernès* 251

Bibliographie.

Exercices de Géométrie, par *F. J.* (compte rendu par *G. L.*) 37

Cosmographie, par M. *Jablonski*. 38

Géométrie descriptive, par M. *L. Gérard* 38

Précis de sciences naturelles, par M. *J. Anglas*.

Note sur la décomposition en facteurs des quantités algébriques; notions sur la résolution des problèmes de construction, par M. *P. Brasseur* . . . 38

Pages.

Note de M. *Boyer* sur le mathématicien P.-J. Servois. 39
L'axiome XI d'Euclide, par le *Général Frolov* 39
Leçons de Géométrie, par MM. *E. Rouché* et *Ch. de Comberousse* (compte rendu par *G. L.*). 108
Cours d'Algèbre, par M. *Andoyer* (compte rendu par *G. L.*) 132
Eléments de Géométrie descriptive par M. *H. Ferval* (compte rendu par *G. L.*). 133
Recueil de problèmes de mathématiques, etc., par M. *C.-A. Laisant* (compte rendu par *G. L.*) 178
Compléments du Cours d'Algèbre et Notions de Géométrie analytique, par M. *E. Combette* 179

Pages.

Recueil de problèmes d'arithmétique et précis de trigonométrie rectiligne, par l'abbé *Gelin*. 179

Questions proposées.

697 à 788

Questions résolues.

634, 675 (2e sol.), 161, 652, 653, 689 (2e sol.), 659, 660, 662, 7, 184, 597, 645, 646, 119, 199, 359, 661, 668, 148, 149, 184, 488, 279, 394, 489, 663, 664, 229, 360, 642, 643, 674, 418, 644, 669, 670, 671, 673, 678, 680, 682, 687, 681, 684, 686, 688, 689, 690, 691, 692.

TABLE ALPHABÉTIQUE DES NOMS D'AUTEURS

Aletrop, 124.
Andoyer, *maître de conférences à la Sorbonne*, 132.
André (D.), 177.
Antomari, *professeur de mathématiques spéciales au lycée Carnot*, 24.
Aubry, 10, 128, 152, 173, 201, 227, 248, 271.
Avilez (J. d'), 71, 119, 120, 144, 223, 225, 246, 279.
Badoureau, 160.
Barisien, 48, 70, 94, 95, 142, 143, 144, 169, 192, 213, 214, 215, 216, 238, 239, 240, 251, 260, 263, 264, 282, 283, 285, 287.
Benezech (L.), 47, 233.
Bernès, *professeur honoraire*, 43, 59, 67, 84, 91, 93, 103, 116, 151, 158, 188, 189, 211, 212, 234, 237, 251, 256.
Boutin (A.), 40, 66, 103, 127, 154, 161, 163, 177, 183, 204, 231.
Boyer, 39.
Bozal Obejero (A.), *professeur à Madrid*, 145, 225, 280.
Brasseur, 38.
Brocard, 120.
Cazamian, 43.
Chapron, 17, 87.
Comberousse (Ch. de), *professeur au Conservatoire des Arts et Métiers*, 108.
Combette, *inspecteur général*, 179.

CRISTESCU, *ingénieur*, 114.
DARBOUX, *doyen de la Faculté des sciences*, 46.
DAVIDOGLOU, 20, 94, 95, 142, 143, 144, 261, 263, 278, 280.
DELLAC (H.), *professeur au lycée de Marseille*, 41, 72, 138, 184, 185.
DROZ-FABNY, *professeur au lycée de Porrentruy*, 6, 20, 22, 42, 60, 63, 67, 87, 95, 104, 105, 119, 189, 213, 236, 238, 258, 260, 263, 279, 280, 282, 283, 286.
DUPORCQ, *élève ingénieur des Télégraphes*, 12, 21, 68.
DURAN-LORIGA (J.), *commandant d'artillerie*, 78, 145, 225.
ELGÉ, 170, 198, 244.
F. J., 23, 37.
F. I. C., 25.
FERVAL, *professeur au collège Stanislas*, 133.
FOUCHÉ, *professeur à Sainte-Barbe*, 143.
FOUCART, 21, 24, 42, 45, 91, 119, 188, 213, 215, 236, 259, 260, 261, 278, 284.
FROLOV (général), 39.
GELIN (abbé), *professeur au collège de Huy*, 161, 179, 222.
GÉRARD (L.), *professeur au lycée de Lyon*, 38.
GIRARDVILLE, 239.
GOYENS, 37, 42, 112, 189, 213, 235, 279, 281.
JABLONSKI, *professeur au lycée Saint-Louis*, 38.
LAISANT, *docteur ès sciences*, 47, 120, 178.
LANGLEY (E.-N.), 3.
LAUVERNAY, 5.
LEMOINE (Em.), 13, 43, 59, 70, 84, 85, 103, 107, 143, 144, 164, 165, 214, 240.
LEROY (E.), *conducteur des Ponts et Chaussées*, 189.
LÉVY (Lucien), *examinateur d'admission à l'école Polytechnique*, 71, 159, 168.
L'HUILLIER, *répétiteur au lycée de Bar-le-Duc*, 24, 42, 45, 92, 93, 115, 116, 119, 189, 208, 209, 210, 236, 261, 262, 279, 284, 286.
LONGCHAMPS (G. DE), 6, 22, 37, 46, 47, 59, 71, 86, 87, 108, 121, 124, 127, 132, 152, 168, 178, 214, 235, 239, 286, 287.
MANNHEIM, *professeur à l'école Polytechnique*, 17, 19, 21, 22, 92, 96, 117, 135, 142, 150, 151, 192, 239, 258, 282.
MATHIEU, *professeur de mathématiques spéciales au lycée Louis-le-Grand*, 97.
MICHEL (Ch.), *élève à l'école Normale supérieure*, 7, 25, 54, 73, 95.
MOREL (A.), 196.
NEGRETZU (J.), 72, 117.
NEUBERG (J.), *professeur à l'Université de Liège*, 22, 46, 68, 226.
NOYER (A.), *élève à l'école Polytechnique*, 7, 25, 54, 73.
OCAGNE (M. D'), *répétiteur à l'école Polytechnique*, 49, 67, 95, 96.
PLACKOWO, 22, 213, 279, 280.
POULAIN (A.), 122, 152.
PRIME (Mme Ve F.), 70.
RAFFALLI, *professeur au lycée du Puy*, 126, 137, 150, 151.
RENOUVIER, 110.
ROUCHÉ (E.), *professeur à l'école Polytechnique*, 108, 152.
SCHIAPPA MONTEIRO, *colonel d'artillerie*, membre de l'*Académie de Lisbonne*, 121, 238, 239.
SOLLERTINSKY, 47, 70, 133, 136, 209.
SVECHNICOFF, 167, 288.
TARRY (G.), 191, 192.
TISSOT (A.), 193, 217, 241, 265.
TZITZEICA, 20, 24, 234, 260.
VALOT (P.), 167.
VIGNERON, 88.
WEILL, *professeur de mathématiques spéciales au collège Chaptal*, 24, 45, 133, 136.
WOLSTENHOLME, 121.

IMPRIMERIE CENTRALE DES CHEMINS DE FER.
IMPRIMERIE CHAIX, RUE BERGÈRE, 20, PARIS. — 21534-12-96. — (Encre Lorilleux).

QA
1
J6836
sér.4
t.5E

Math.

Journal de mathématiques
élémentaires

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY